三思文库·公众科学系列

总　序

如果按照传统的分类，“三思文库·公众科学系列”大致相当于一套“科普”丛书。几十年来，我国在科普类图书的出版中，曾经有过辉煌的历史。就是目前，在大力提倡“科教兴国”的背景下，各种科普性的书籍也仍是出版的热点。我们这套丛书之所以命名为“公众科学系列”，除了与国际接轨的考虑之外，更多地是为了体现一种与传统科普类书籍有所不同的出版理念。

随着近代科学的诞生，随着科学对人类生活所产生的越来越重大的影响，科学的地位在社会上变得越来越崇高。在现代社会中，一个对于科学没有任何了解的人，会被认为是所受教育极不完善的人。从整个世界范围来看，虽然“两种文化”的分裂仍是一个需要继续解决的问题，但在一种几乎是共识的观点中，人们越来越认识到科学和与之相关的科学文化的重要性。在强调人文文化的重要意义的同时，向更广泛的公众宣传和普及科学与科学文化，已经成为教育改革的重要目标。例如，美国科学促进会在 80 年代末提出的著名科学教育改革方案“2061 计划”的总报告中，就明确指出，普及科学基础知识包括科学、数学和技术，这已经成为教育的中心目标，“在下一个人类历史发展阶段，人类的生存环境和生存条件将发生迅速的变化。科学、数学和技术

是变化的中心。它们引起变化，塑造变化，并对变化作出反应。所以，科学、数学和技术将成为教育今日儿童面对明日世界的基础”，并进而在该计划中将这种科学基础知识普及的范围扩大到所有的美国公民。

尽管在各种类型的教育中人们都意识到要普及科学基础知识，但就世界范围而言，在西方，本世纪40年代以前，也正像在中国近几十年来甚至很大程度上延续至今的做法一样，强调的是所谓的“科学普及”(popularization of science)。在这种“科学普及”中，更关注的是对科学中的具体知识的传播和普及。40年代以后，随着科学和技术对人类生活的影响的进一步加大，也由于人们对于科学对人类和社会的影响的更加全面、深入的研究与思考，包括对科学和技术对推进人类社会发展的积极作用的认识以及科学和技术对人类社会可能带来的负面作用的认识，科学和技术的普及工作开始超出了具体的知识的范围，也就是说，出现了由传统的“科普”向着“公众理解科学”(public understanding of science)的转变。在这种转变中，除了具体的科学知识之外，对于科学与人的关系，对于科学与社会的关系，对于作为一种人类文化的科学的认识等内容，也都包括在公众所要“理解”的范围之内。我们这套以“公众科学系列”名义出版的丛书，也正是要体现努力提高公众科学素养这样一种新的观念。

现在人们已经认识到，完整地讲，科学，并不仅仅就是那些具体的、技术性的知识，它同时也是一种文化。正是在这种意义上，我们才会谈论所谓的科学精神。长期以来，在传统中，我们更加注重对科学中具体知识的学习、引进和传播，而忽略了对于科学精神、科学文化的宣传和普及。或许，这正是导致科学在我国至今没有真正适于扎根的土壤从而使科学的发展相对落后的重要原因之一，也正是在社会上因对科学缺乏真正的了解而出现

的虽然人们在口头上无限推崇科学，实际上许多人却常常是打着科学的旗号来从事种种伪科学的原因之一。

正因为如此，“三思文库”推出了这套“公众科学系列”丛书。我们企望以最新的出版理念，向广大读者全面地、系统地宣传科学知识、科学精神和科学文化。我们相信这样的工作是有意义的，也相信这套丛书能受到读者的欢迎。

三思工作室

1999年10月

献　词

献给安布洛斯、杜布和冯·诺伊曼。

他们在自己不知道的情形下,使我成为我今天这样的人。

序　言

这是一本数学自传，是传主写的数学传记。它肯定不是我的出身经历和生活的写照。不错，我有父母(两人)，妻子(两人，一度一人，与目前的妻子已结婚40年)和猫(8只，一段时间两只，目前两只已养了3年)。我过去有、现在仍有许多缺点，我也相当自信有一些优点。我喜爱海顿、长时间散步、尼罗·伍尔夫(Nero Wolfe)、黑啤酒，有几年还搞过战术导弹。这些都是事实，但不关你们的事——这本书谈的不是这个。

这本书谈的是一个职业数学家从30年代到80年代的经历，多少是按年月顺序写成，从中学时代直到退休。但是各小节不是按时间先后而是根据内容编排的。书中谈到伊利诺伊大学、高等研究院和一般所称的芝加哥、密歇根和印第安纳。书中表达了个人成见，说轶事，闲话人，也有说教；谈到参加初试、寻求工作、写书、旅行、教书、作编辑。

50年前我自傲、反传统、热切、有大志、匆忙、无知、心神不定。至今我已缓和下来，成熟了(?)，学到一些事情。这本书有几分可说是从今日之我追溯往昔之我，披露了一些当时我急切想知道的奥秘。

P·R·哈尔莫斯

目　　录

第一部　学　生

第二部　学　者

第三部　长　者

第 一 部

学　生

第一章 读·写·算

文 字

文字和数字，我更喜欢文字，一向如此。

那么你很可能要问，我怎么是数学家呢？这我不知道。我从一生的经历看得出一些理由，也看得出机遇所起的作用至少和个人选择的作用一样大；这种种情况，下文我都要细说。我的确知道，我自己并不总是拿得准想作一个什么样的人。

开篇头一句话可以说明我对许多事物的感受以及我如何有了这种感受。举个例，这句话言外之意是：在数学中概念和计算我更喜欢概念；或者说，我想要此话含有这个意思。在我看来，群的定义比柯西积分公式清楚得多，也重要、优美得多。拿概念跟事实相比不恰当吗？好吧，在我看来一次可微复变函数的无限可微性，论优美和深刻都远胜过关于非交换指数级数著名的坎贝尔-贝克-豪斯多夫(Campbell-Baker-Hausdorff)公式。

开头那句话也包括我的一点声明：我喜欢了解数学，为自己、为众人阐明数学，更甚于在数学上有所发现。忽然明白一个原先的奥秘时的乐趣，和忽然发现一个迄今不明的真理时的乐趣，对我来说是一样的；两件事都有启蒙之光的闪现，想像力惊人的提高，精神放松后的大喜和欢快。同时，发现一个新

真理和了解一个老真理，主观乐趣虽然类似，有一点却完全不同。差别在自豪，在胜利感，在因为拿第一而产生的近乎恶意的心满意足。有“第一”就意味着有人是第二；想当第一就是要求“在曲线上被分级”。我的这番话仿佛是说阐明旧数学比发现新数学更合乎道德，这可明明是傻话；但是让我这样说吧：彻底了解一件事而不自鸣得意，总比扬扬自得要好。或者，我是不是说在数学中我更善于打磨旧东西，不大善于探索新东西，更喜欢我能加以改进的那种东西？

我主张讲解问题也要多用文字少用数字，特别是讲解数学也要这样做。在数学中，创造精妙的符号体系（以表示积，表示幂，表示级数，表示积分——表示一切计算概念），常常是一大进步，但使用符号虽然能简化计算概念，同样也能使概念变得晦涩难解。

举例来说明我要提出的论点。试看一个著名的初等定理及其著名的初等证明。这个定理就是内积空间中的贝塞尔不等式。定理说：若 $\{x_i\}$ 是规范正交集，x 是向量，而 $\alpha_i(x, x_i)$，则 $\sum_i|\alpha_i|^2\leqq\|x\|^2$. 有个标准证法是，设 $x^1=x-\sum_i\alpha_ix_i$，然后计算：

$$
\begin{aligned}
0\leqq\|x'\|^2 &= (x', x') = (x-\sum_i\alpha_ix_i,\ x-\sum_j\alpha_jx_j)\\
&= (x, x)-\sum_i\alpha_i(x_i, x)-\sum_j\bar{\alpha}_j(x, x_j)+\sum_i\sum_j\alpha_i\bar{\alpha}_j(x_i, x_j)\\
&= \|x\|^2-\sum_i|\alpha_i|^2-\sum_i|\alpha_i|^2+\sum_i|\alpha_i|^2\\
&= \|x\|^2-\sum_i|\alpha_i|^2
\end{aligned}
$$

这个证明既严格又干净利落，但是缺乏启发性。我认为理想的证明就是这一句话：“作 $x-\sum_i\alpha_ix_i$ 与其自身的内积，再乘开。”这一句话足可以促使思想灵敏的读者拿起铅笔把上列一连串等式写出来；或者，他也可以坐在椅子上闭眼向后仰靠，在脑子里瞧着那些等式。如果他懒于这样做而又想多做点什么，就可以

把这句话拉长来说。"结果为正，由这四项构成：第一项是 $\|x\|^2$，规范正交意味着末项是 $\Sigma_i|\alpha_i|^2$，向量积两项都等于 $-\Sigma_i|\alpha_i|^2$，其中一项跟末项正和对消；下余部分即所求不等式。"

论长度，文字和符号大致占同样多纸面。文字比较清楚，此外还有一个优点：你在课后走回办公室的路上，不用黑板或粉笔也能向人讲解。使用文字，也很可能发现相应的一般概念和关系（例如，投影的相关之类，因此加深了解。）

我并不提倡对文字的爱好，可是我察觉自己对有关文字的几乎一切事情都怀有喜爱。我喜欢玩文字游戏——字谜游戏，詹姆斯·瑟伯（James Thurber）的超级幽灵，胡写乱画——而且乐于查考这些游戏的语源——起源何地，从前指什么意思，后来如何演变，现在的精确意义是什么。我之所好向来称作语文学（philology），按字源讲就是"爱文字"。用现代词来说是"linguistics"（语言学），我不喜欢语言学。它太像数学了，更糟的是，它很像那种"数字"数学。语言学不去对付自然语言中困难的抽象语义学概念（例如"意义"和"解释"），几乎纯粹讲形式句法的符号演算。

并不是一切数学家都喜欢文字。数学家与文字爱好，我觉察其间有一种关联，只是没有证据。代数学家，如阿廷（Artin）喜欢文字；分析学家，如柯朗（Courant），不喜欢；几何学家有的喜欢，有的不喜欢，要看他属于代数派［札里斯基（Zariski）］还是属于分析派［莱弗谢茨（Lefschetz）］。另一种相互关联是：那些的确喜欢文字的数学家出了名，受人爱戴，因为他讲得清楚；别的数学家惹得学生发火，天天抱怨，咒他。这种相互关联，但愿我能够证明。无论我是否能证明这个一般定理，这种相互关联、这种类比，在感情上我是信服的。集合论和代数与算术和微分方程的关系，似乎跟文字与数字的关系一样。

我敢不敢下一个概括的结论？我想要说，喜欢文字比善于演算是数学能力一个更好的标志。许多研究生院指导教师曾特别提到，申请做数学研究生的人中，GRE 语言部分考得高分数者，比关于数量的部分考得好而语言部分考得差的人，被录取为博士生的机会要大。

书

“文字和数字，更喜欢文字”，或者反过来说，更喜欢数字，这种偏爱是怎么产生的？我以为也许是出于个人性情，也许是幼小时期养成的，而一旦养成这种偏爱，无论是偏爱文字或是偏爱数字，我们就执着不改。以我自己来说，这种倾向 4 岁时开始显露，到了 8 岁更加坚定。我很早就学会读书，而且没有困难；然后学会写字。算术不难学，但是我学得晚，学得也比较慢，学算术既不容易也没有很大乐趣。

我家在布达佩斯，一家人住一套第三层的单元房，房外临一条繁华街道(现名列宁大街)。这条大街多彩多姿，往来拥挤，人声嘈杂，很引起人的注意和兴趣。街上商店林立。一家诱人的五金店在宽大的玻璃板门面后边摆着明晃晃的刀；几家书店里四处堆着、散放着五颜六色的书；咖啡馆里有低声下气、满腹牢骚的服务员，在黑色的左袖套上搭着白餐巾；还有些商店满屋子玩具、糖果、拐杖、衣服、鞋子和手表、挂表。便道宽阔，在商店橱窗和路边的树木、磅秤（花一个分币可称量体重)、报摊、出租车站之间，人群来往穿梭。便道上似乎总是行人如织。我清早上学时那里有人；偶尔我外出远足或去看电影，深夜别人带我回家时那里也有人。后来我长大成人，作为一名美国游客去匈牙利，夜间很晚出门时，那里还是有人。灯火通明，咖啡馆的吉普赛乐声在耳边回荡。

大街路面很宽，足可并排通行两辆有轨电车，此外还有两股车道。你把一枚分币放在电车轨上，铁轮轧过后分币被压成扁平，拿起来看真是好玩。有轨电车和出租车总没有安静的时候。我幼小时出租车还是马拉车，后来才改为汽车。虽然列宁大街与拉科西路的拐角处不完全像百老汇与第七大街，但是市中心的斯卡司代尔却很像。我 13 岁时迁入芝加哥的一个住宅区，那里的街道白天就很安静，晚间几乎像荒无人烟，住了一段时间我才习惯。

早在我开始上学前很久，我就爱从前窗向外凝视，自得其乐。对拼写商店名称的那些巨大字母百思不解。“那说的是什么？”我很想知道；“那个字母的名称是什么？”对我的种种问题给予解答，并不构成系统的阅读课程。这种语文学习法大概会使看—说派和语音派语言学习法的倡导者感到震惊，但是它很管用。我抱定好奇心不放松，结果是到我满 4 岁时，我不但认得全部字母，而且也会阅读，开始在祖父的巨大私人藏书室中缓慢前进；不久街上往南隔几个门的外借图书馆也有用了。祖父的书存放在带玻璃门的书橱中，橱门锁着，钥匙搁在一个抽屉里，用另一把锁把抽屉锁住，这把钥匙老头子随身携带。我手指什么书他就给我什么书，不问我、不检查，但是须有他在场，自己开书橱。

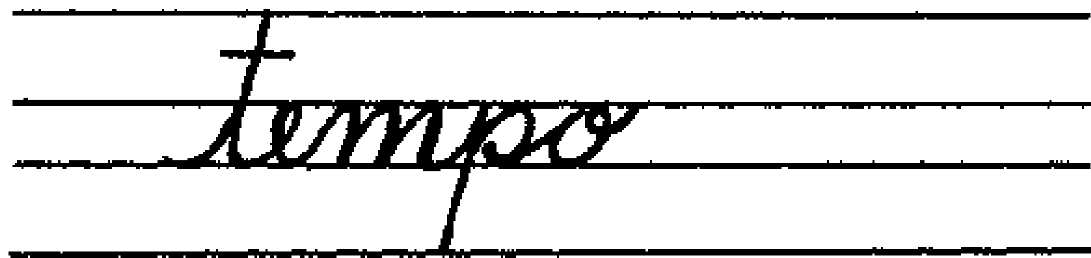
我读的东西很多。我到了通常入学年龄 6 岁开始上学。一上学就有了家庭作业要做——是的，从 6 岁以来每天有家庭作业，但是还有大量剩余时间可以看书，在吃早点的时候、在晚饭前、在澡盆中，最好的是晚上，都可以看书。熄灯前我躺在床上看书，同时用一台小晶体收音机插耳机收听维也纳和巴黎的电台播放的音乐。我阅读欣赏格林童话和安徒生童话及伊索寓言和拉·封丹的作品；不久以后，又阅读《斯卡拉穆什》(*Scaramouche*) 和《赞达的囚徒》(*The Prisoner of Zenda*)，这

些书的语言全是上等匈牙利文学语言。当然也有匈牙利文学尤卡伊（Jókai）和卡林济（Karinthy）的作品，以及全世界的优秀作品和激发兴趣的劣等文学。尼莫船长和尼克·卡特，福尔摩斯和阿森·鲁宾全是我的朋友。美国文学的代表人物是詹姆斯·费尼莫尔·库柏和马克·吐温；关于钦伽奇古克和汤姆·索耶，我知道的事情大概和堪萨斯市大部分孩子知道的一样多。

五六十年后回首当年，我很欣赏羡慕那个时代的气氛。那时候文化不是可笑的、异常的或柔弱无力的东西——这是不言而喻的。大家把书籍和音乐看成每个人普通遗产的一部分。在学校我们讨论最新的尼克·卡特，但是我们也谈达尔塔南；而且我们可以彼此相告我们刚读过什么作品，不会让人认为你性情古怪。

写

我刚上小学时就会阅读，但是我还得学写。弗洛伊德也许要讲这必是我的一段创伤性经历，可我却几乎全不记得半点这种经历。我集中精神去回想，眼前会浮现一幅模糊图景：一间屋子不太大，大不过像我现在的起居室，里面坐着一些姓名不详的孩子，还有一位妇女，就是老师。老师叫我们使用特制的平行线纸。小写字母如 e 和 o 必须夹在中间两条线之间，彼此紧凑；向上和向下笔划，像 t 和 p 里的笔划，要达到更靠外的顶线和底线。写出来结果就是这个样子：



这个要求很难办，我感觉没把握。教大写M那天我缺席，就得自创写法。为此我用了很长时间，大伤脑筋。

我到美国后，很快注意到我的笔迹“不一样”，清楚倒清楚，但是奇怪的是总带有外国特点。后来我刚开始教书时，我的笔迹成为信息交流上造成不便的一个小障碍。我重新自学，结果是至少就笔迹而论，我可以被看作奥马哈出生的人了。

以上说的是写字。至于表达意思的“写作”，比写字更重要得多，难得多，要多花很多时间去学。在我记得的第一篇写作中，我想要表达我的爱国精神。

那个年代爱国精神的主要焦点，是特里亚南条约。第一次世界大战后，根据此项条约分割匈牙利，被分割后的匈牙利国土只有原先的三分之一大。“不行，不行，决不行！”是国民的呼声。在学校里，我们天天背诵匈牙利语的效忠国旗誓词。我喜爱这段誓词；我对特里亚南条约感到愤慨，我希望恢复帝国。我叙述个人政见，说我是保皇派。在我的班上，叫我们写一篇爱国文章，我的文章得了奖。我信仰这番事业；当时我已感到日后我对文字的爱好正在萌芽生长。我写出辞藻华美的散文，因而感到自豪。

我爱写，写起来也容易，这是怎么回事呢？我只能推测。我知道有三种主要影响：我读得多，写得多，又喜爱语言。我想这三点说到底都可归结为喜欢文字。

我肯定知道，读伏尔泰和塞万提斯，或是读仲马和施尼茨勒，对我的数学文体发生好的影响，使它有所改进，并且帮助我成为一名更好的教师。读书丰富我的词语，扩大我的世界观，加深我对自己想要接近的听众的了解。我有些朋友傲然宣称他们从不看小说，真令我吃惊。他们有的把一切小说叫作谎言，或者用比较厚道的话，说那不是实在的真故事，而是虚构的人造故事。真故事讲的是压迫、萧条和战争，还有运动、选举和上

层腐败；这比简·奥斯汀、狄更斯、高尔斯华绥、索末赛特·毛姆“有意义”得多，“切实”得多。不对，不对，不对！我从感情上反对这种观点，在业务上我也反对。我并不是提倡脱离世界，退而隐居；但是我坚决认为，假如我没读过新旧约圣经（詹姆斯国王钦定本），和《阿丽丝漫游奇境记》以及《麦克白斯》、《独立宣言》和《人与超人》，我就不能写任何一种东西。

至于写——我是时时在写，从我能记事起就时时在写。我写信，有时我写日记，我为自己作笔记，用整句作明白笔记，不是只写什么“试作幂级数展开”或“在 P>1 的情况下，参见邓弗尔德-施瓦茨（Dunford-Schwartz）”。我通过写来思维。上大学时我写笔记：那就是把课堂上潦草写下的简缩的话改写成容易读的合语法的句子。后来，我开始要证明定理时，我就一路写下去，仿佛我在和自己进行谈话。“如果我限于讨论遍历情况，那要怎么样？好，我看看。我已经看过 S 为遍历的情况，可是有用的情况是如果 S 和 T 都是……。”（当时所谓“证明定理”，是个低调说法，相当于口气比较大的“作研究”。）

我很想拿这一点向人说教，说：这是正确方法，这样做吧，要按我的方法去做，不然你就要失败。但是我能肯定的只是：对我来说这是正确的方法，我没有什么别的方法能做事情。

语　言

阅读、写作和语文是助成我写的三个因素，以上已经讲了阅读和写作。至于语言，我的感情至少一部分可能是由于我学母语以前已经学了一门外语。我不到两岁时家里有一个提洛尔人保姆，那保姆教我德语，我一生总是希望保持德语能力。我听德语（特别是奥地利德语）的能力满不错，但是我不会讲：除了我后来学的专业德语不算，我掌握的词汇只是一个 4 岁孩子

的词汇，动词和 der-die-das[1]我是不懂的。

我 6 岁左右，接触到拉丁语。我有一个哥哥大我 5 岁，他有时在公共桌旁咕咕噜噜念拉丁语记忆课。我们经常在公共桌旁玩耍和学习，有些记忆课便落入我的耳朵。我现在仍记得一个拉丁语前置词表（ante，apud，ad，adversis，circum，circa，citra，cis，……），这些词都是和宾格连用的前置词吗？

稍后就有了希伯来语。学校是按天主教徒、基督教徒和犹太人分开的。我们学校的宗教教育分两部分，一部分很好玩，一部分真可怕。好玩的部分是：一位下巴上留着一小撮胡子的不起作用的老领唱者，坐着拉手风琴教我们用希伯来语歌词唱一些赞美诗。我想他怕我们，但是劲头十足的曲调占了上风，我们几乎都盼望着每周的这节课。我仍旧记得一些曲调和一首赞美诗的头两行。可怕的部分是希伯来语课。教希伯来语的是一个很严肃的人，团团的脸，胡子刮得光光的，一本正经的态度。他不教我们什么希伯来语，他甚至不去试教一教；这可不是教师这一行所提倡的作风。他所做的事就是把我们转变成能够使印刷的一段希伯来文字化为声音的机器。我可以瞧着旧约的一页，上面印着带标点符号的希伯来文，我虽然一字不识，却可以把映入眼帘的符号转变成由嘴唇发出的声音。

在校内，在家里，都着重世界性的东西。法语（不知怎么，我从来没花时间和精力去学）不仅仅是一门功课，也是个活东西。我父亲打电话若不想让他身旁吵闹的小孩听懂，就讲法语。

我觉得即便是娃娃德语、二手拉丁语、机器希伯来语和奥秘法语，也开扩了我的文学视野。且不说别的，这些语言使我学会察觉表达同样思想的各种方法的异同。

---

① der，die，das 是德语中用于阳性名词、阴性名词、中性名词的定冠词。——译者注

眼下有些研究生反对要他们学会看懂两种语言当作得博士学位的条件。“我们干吗学些个花儿和家族，所有格和过去分词呢？——我们想要的就是看上月的巴黎讨论会报告。”有的更进一步：“哪个需要德文？——对我来说，Fortran 实在有用得多。”

真要命！我太担心了，我预言采取这种反语言、反文化、反知识的态度，结果会使国际科学信息交流恶化，而且会产生大量坏作品。我曾学到的任何语言的一点一滴知识，后来对我写东西都有帮助。我为了专用于数学而学的丹麦语、葡萄牙语、俄语和罗马尼亚语是这样，我总算接触到的希腊文和梵文的点滴知识也如此。我始终懊悔没跟人学希腊文；一分希腊文知识，十分见识的报偿。这些年当中，我设法学会不少希腊文词根，来源是我的书架上那些英语词典，尤其是“美国传统词典”和“韦氏大词典第二版”。我觉得我需要先查出单词的词源，才能准确使用这个词；而且我知道我之所以在英语拼写上没困难，理由就在于我对别的语言虽然是略有所知，也使我认识到大多数难词的出处。这是件小事，但是在这里提一下还是合适的。

平心而论，拿 Fortran 来代替德语，只是 90%坏，不是 100%坏。在了解文化和掌握信息交流术方面有所失，在仔细注意细节和接近掌握信息交流科学方面也有所得。了解形式语言的理论和实际，对文字写得精确也许有帮助，特别对没有数学才能的学生有帮助，但是对把文字写清楚根本没有帮助。这个区别，人往往忽略或者凭说理把它化解。但这是个大错。一段不会被人误解的说明文字和一段实际上人能理解的说明文字有天壤之别。

数 字

我在家学会数数，就是说我学会正整数集合开头一个小区间的那些数字的名称；我可以按顺序背出这些数，我可以说出5块小甜饼和7块小甜饼的差别。我对算术的一次最早的体验，使我跟我那位迷人却让人摸不清的父亲发生接触；这次体验和时钟有关。他用卡纸板剪成一个圆盘，圆盘上标出罗马数字Ⅰ至ⅩⅡ，盘中心钉上指针，用它来教我认钟。课程在专属于他的那个大房间内进行，允许谁进人那个大房间是一种少有的优待。这间房既是他的卧室也是他的诊室（他是医生）和书房（在少有的闲暇时间，他常在书桌旁琢磨象棋问题）。床在白天便是一个宽阔豪华的长沙发，上面盖着华丽俗气的波斯花毯。房间的一面墙上有三个大窗户，屋里阳光充足，令人愉快；窗户对面是一排玻璃门书橱。认钟课进行了一个多星期。我终于弄对了，在钟面上显出8:45的时候我会说“八点三刻”，自己又激动又得意。

那时候我也听说了三角学，但是三角还是令人惊骇的一大奥秘。我哥哥，就是那位咕哝拉丁语前置词的哥哥，也背过对边与斜边以及各种恒等式。那时我哪个恒等式也记不住。我甚至不认识表示这些概念的匈牙利字。多年以后，我学习三角时，我得先战胜恐惧才会明白学三角实在是很容易的。

在小学里我学算术，就是九九乘法表之类。算术我不特别行，有些乘积，例如6×7和7×8，我总是不能自动说出得数，我总得停住想一遍。（乘积和大写M是同一天教的吗？）我的确知道的那些乘积（我十分肯定3×7＝21）似乎是保留在我的听觉记忆中；这些乘积不是我“看见”的或“理解”的，而是我听见的。

我听见这些乘积，听见的是我的母语——匈牙利语，这件事有时让我心烦。虽然我讲英文、读英文、写英文、梦英文，大大超过半个世纪，我听见的算术却总是匈牙利语的；我结算支票簿时嘴里咕哝的数字是匈牙利话。不是“nine and eight is seventeen, carry one”[①]而是 “kilenc és nyolc az tizenhét, marad egy”。[①]什么缘故？也许是因为算术是我们大家天天都咕哝的东西，大多数别的学科常常可以一搁就是一星期或一个月。

我在匈牙利受的算术教育，成为我在美国教书初期的一个小小障碍。要知困难何在，请看这两个算式：

```
1932×473
7728
13524
  5796
913836
和

1963÷29=67.68
    -174
      223
     -203
       200
      -174
        260
       -232
         28
```

不大功夫就可以断定这两个算式是一个长乘法和一个长除法，但是都“不一样”；看上去和美国的算式不一样。我是这么学的，可是我的大一代数班上的学生，作 1963 除以 29 就够麻烦了，要用一种他们觉得落后的方法去作，他们更对付不了。在

① “九加八，十七，进一。——译者注

这方面和笔迹一样，我必须再学点东西。我学了；我学得很像一个内布拉斯加州人。不过，我承认甚至现在我当众作长乘法或除法时，仍必须有意识地避免再现原形。

还有一个算术上的障碍，但是这个障碍不曾引起我一刻的焦虑。我上学时，有些比较复杂的算法我从未学过，例如求平方根的作法。毕业很久以后，有一次我的一位朋友求平方根作给我看，于是我记住这种技术，但只有两三个星期。

我表哥比我大一岁；我 8 岁、他 9 岁时，祖父常常叫我们作三位数乘法彼此竞赛，看谁作得快（当然是不用纸笔，单靠心算）。我既不喜爱也不厌恶这种竞赛。我喜欢获胜，我喜欢得到奖给胜者的那枚钱币。我们作得大致一样好。

学习或烦恼

所有的孩子都怕上学吗？我肯定怕——上小学不像对下一阶段要上的名叫 Gymnasium[①]（G 的发音如 GIVE 里的 G）的中学那么怕。照我的感觉，“怕”是个太轻的字；更好的说法是不断的烦恼、忧虑，是的，还有恐惧，让人永不得安宁。我从不气馁，但是讥讽和公开非难的那种压倒性的精神力量，足以促使人学“好”。学“坏”并不大指你肮脏、喧闹或爱破坏，或性格残忍，主要是指你不准备好答问。

高等中学的课程是 8 年制课，包括 8 年拉丁文、4 年希腊文、5 年数学和大量的自然科学、地理、历史和文学。我 10 岁如期入学，但是我没有待到 18 岁参加那名叫“matura”的折磨人的综合考试，因为我 13 岁就移居美国了。Gymnasium 教育的

① 高等中学：一些欧洲国家特有的一种学制，专为培养学生升人高等学校。——译者注

重点是美国所说的文科教育，教育内容是广泛深厚的文化，绝没有职业训练。

厚厚的教科书要在学校和家庭之间带来带去，我们许多人都有一种现在我认为很可悲的习惯：星期二早上从书里撕下有关星期二课堂作业的四五页，书的其余部分留在家里。带的东西少多了，但是要带的总得带，因为上课时可能叫我们翻译拉丁文课本的第 87 页，或叫我们解代数书第 43 页上的题。我们总是有可能得在星期二答问。我们当然要投机。我们知道星期一问过、星期二再问的概率很小，我们尽力猜测老师的习惯——这一位常按姓名字母顺序叫，那一位总爱不断骚扰那些坐后排的笨蛋小子。

课堂答问题有时候很短（“马夏思王的继任者是谁”，“意大利最长的河流是哪条河”），你可以坐在位子上回答；有时候很长（指定一段话，要你在黑板上写出你的拉丁译文，用完成平方法解指定的一个二次方程），你就得到黑板前去作。你的功课作得令人不满意，常常受到大家嘲笑，或者放学后被留校，给你留额外的家庭作业，当然当天给一个坏评分，年终交你一份坏的成绩报告单要你带回家。

课堂答问最糟的，感觉像是个傻子站在那里，人人瞧着你。那些学生不比一般学生强，也不比一般学生差。他们不是天才嘲笑呆子，他们课下的态度大都是各处学生通常所表现的那种幼稚的反知识精神——糖果、足球、电影和姑娘，比功课、家庭作业、课堂答问和评分等级重要得多——但是当你受到严厉盘问时回答不好，哑口无言或结结巴巴，你感到大家都蔑视你，你再也抬不起头来。

我的拉丁文不太好，地理更糟。这两科的老师吓唬我，比文学和数学老师吓唬我还凶。我不知道哪个是因哪个是果。只

有一次我做对了，回想起来越发快活，满怀温暖，事隔55年还几乎和当时一样活现在眼前。我在黑板上写一个拉丁文句子，写到一行末尾，那个字必须划分音节。匈牙利语的音节划分规则，跟我们的教科书上所说适用于拉丁文的规则不一样，我记得照拉丁文的划分法作了。班上有人—— 是谁，根本不知道；或者，是谁，忘了—— 偷偷地笑我的“错误”，我也不是那么有把握，难免担心。老师埃斯特戈密（Esztergomi）先生（我完全肯定他姓 Esztergomi，我永远忘不了他）瞥一下我写的形式，对偷笑的人大声咆哮：“他作得好”——他让我一天过得都舒畅。一百年舒畅。

在记忆中（怀乡病?），我看见那个年代我的老师们，不但看见我喜欢的老师，也看见我怕的老师，他们都是真正了解和关怀学生的老成持重的人。甚至在我将近13岁时，我就开始有了一个想法：学知识是好事，这比学习为取得好分数要好。

物理课是给学生观赏的娱乐课。把一些预备好的实验如马德堡半球等作给我们看，再给我们讲抽水机的工作原理。我大约12岁时，在圣诞节前夕，为使自己安静下来度过礼物包打开前那段痛苦难熬的时光，我设计了一个自己虚构的方案，我画了水泵的一个很细致、很漂亮的工程图。我在学校里刚学过水泵。

学校里教我的数学是初等代数（括号，二次方程，两个二元线性方程），我觉得既不难也不特别容易。我学得够好，在一般水平以上，还受到别人的注意。有一年夏天，一个和我同岁的男生的父亲在一个度假胜地找到我，出钱请（!）我教他的儿子。那男孩的问题是他去年数学不及格，需要先通过一项特别考试，才能准许他在秋季注册入学。报酬不高（一小时工资可以买一个奶油馅饼），但这是我挣来的（而不是获得的）第一笔

钱。结果那孩子及格了。

学英语

我父亲是个鳏夫，我是他的幼子。我8岁时，父亲移居美国。在美国落户后，又结了婚，给我们带来两个异母姐妹。他就开始把我们接到美国去，先接我的两个哥哥，后来在他归化为美国公民后，几乎立刻就把我接去。由于我父亲的国籍，我13岁一到美国当即成为美国人。

预期迁移美国，先安排我们学英语。这种安排的效果不大好。一位上年纪的爱尔兰人约翰·费根（John Fegan）每周一次来教我们。我不知道他为什么在布达佩斯，也不知道他原先是怎样跟我们有联系的。我怀疑他是什么靠家人汇款为生的人；我确实知道他没有教语言的才能，也没有学语言的才能。他在匈牙利居住这些年，只学会三个匈牙利语单词。一个是“transfer”（“换车”，坐电车使用），另外两个是“scrambled eggs”（炒鸡蛋）。

费根的主要教学法是交给我们一些从英文杂志剪取下来的单篇文章，让我们抄写。全是现今在《读者文摘》里见得到的那类文章。例如，有一篇是写泰坦尼克号沉没事件的；关于这个话题我学到的东西太多，远超过我想知道的。抄完这篇文章，要我大声读出来，一面读下去，一面改正我的发音；还要回答问题。灾祸发生在什么时候？（1912年4月15日）；死了多少乘客（1500）。就我来说，这种学习法像是我只上学而不与朋友进行交际，而进行交际是能补学习的不足的。我尽可能少学，所以学到的东西实在太少。

我（由父亲的一位和我同时移民的朋友陪伴着）到达纽约

5分钟后，一个和善的海关官员以为我茫然不知所措，就问我要不要他帮忙。我刚刚能听懂“帮忙”这个词，就很得意地回答：“我们在等……”——“搬运工人”这个词刚到嘴边又溜走了。我的发音坏得要命，但是他听懂了，微微一笑，补上我漏掉的词。（我想要说的句子在费根的一篇课文里出现过。）

不到一个月之后，我就去芝加哥的近北区沃勒中学上我的中学第一课。有人领我到一间教室，我还记得教室里有个很体面的男子正在讲物理。我正正经经地听讲，但是他说的话我一个字也没听懂。一小时末了，所有的学生站起来到另一间教室去。我感觉自己像个傻瓜，挺尴尬的。谁也没给我讲过上课的程序。我该怎么办？我该去哪儿？我就是糊里糊涂坐在那里。老师佩恩（Payne）先生过来到我的座位旁，问我点事情。我无可奈何地耸了耸肩。我们试着讲各种语言。几句拉丁文，几句法文，和一些手势语。他终于能够告诉我，我得去252房间。我去了252房间，我总算度过我在美国中学的第一天。

人13岁的时候学一种新语言很容易，即使你性格忸怩、自尊、又羞怯；容易，但不总是愉快。我记得两三个月后发生一件小事，记起这件事我感到万分羞辱和恼怒。一次我们参加考试，我旁边的男孩向前面的男孩借橡皮。他用完橡皮，我也需要用。我向橡皮的原主那个男孩咧嘴笑了笑表示歉意，就向借橡皮的那男孩借橡皮。橡皮原主瞪我一眼嘴里咕哝：“该死的外国人”。这件事我永远忘不了，每回心里想起都感觉不快、怀恨和恼怒。我看见他的样子，我听见他的声音，他大概可以说明我的一个不合理的偏见——他必是我厌恶圆脸阔肩“足球运动员”类型那种人的主要原因。

三个月后，我的英文口语能说得很快但不正确，并且带着浓重的地方口音。阅读要容易些、快些。1929年圣诞节假期的

一天，我看书时大为兴奋激动。那是我第一次读英文书（一本福尔摩斯侦探小说），一口气读下去，不是为学习而是为乐趣，不像读一课书那样精神紧张，也不必停下来查单词。有趣！

还有口音。我是外国人，是个带或不带贬意形容词的外国人；我样子像外国人，听口音像外国人。有一天我正在一间暂时空出的教室里自习，一个妇女把头探进来问我教员休息室在哪儿。听到我的回答，她没往那里去，倒进来了。她在教育厅工作；她的工作是找寻像我这样的外国人给予帮助。她受过语言训练，她要使我听口音像是美国人。她没有成功，但是她帮了大忙，我永远对她感激不尽。

我原先总是说 VAHT[①]，不说 WHAT；V 音和 W 音的区别，我觉得太细了。这位口音循序消除者矫正了大部分这类毛病。她说，说“HOO”。她说，说“AH”。她说，说字母“T”。现在这三个音分开一个接一个说，慢慢地细细说：HOO-AH-T。说快点。再快点。急速说——果然我说出 WHAT，就仿佛我是在 4 个街区以外富勒顿大街出生的。

我们一家人在家里几乎永远讲英语，我会的匈牙利语停滞在 13 岁的水平。我先前也可能是个聪明的 13 岁孩子，是个博览群书的 13 岁孩子，可是我那时 13 岁依然如故。哲学上的和政治上的词语（如洞见、道德、投票、治理之类），大多不在我能主动使用的日常词汇以内，成人使用的现实生活词语（如提薪和建筑承包商之类）也不属于我的日常词汇。虽然我的匈牙利语还能讲得很快，口音近乎完美，我掌握词语及其语法的能力却很弱，使我感觉别扭不舒服。

我在发英语语音时没有完全丢掉我的外国口音，这是我生

① VAHT [vaːt]，WHAT [hwaːt]，HOO [huː]，AH [aː]，T [t]。——译者注

活中的祸根。我尽力做，十分尽力去做。有时候做到外国口音不显著，不被察觉，融人群众，总是安心。我愿意作那些男孩当中的一个，不愿意让人问："那你是哪儿的?"，"你来这儿多久了?"我再也不想听人讲，"噢，你的口音真有意思"。我许是对这个太敏感了，但是我总是把"那你是哪儿的?"听成"你是外地人，我们这一带不大需要你"的意思。我在美国过了几乎整整一辈子，在各方面——在行动举止上、在语言上、在趣味上、在教养上——我感觉都像个美国人。我不喜欢被人说成匈牙利人。我不是**他们**当中的一个，我是**咱们**当中的一个。

中　学

上完4年小学后，再读8年制高等中学课程，这跟美国学制正颠倒。美国学制是读完8年级后接着上4年中学。既有这种差异，便可能要点诡计，按某种意义说也就节省我4年的生活。我的继母总是相信她生活中的每件事都像解一道极值问题：她认识的穷人比别的一切穷人都穷，富人比别的富人更富；她上的大学授予最高级的法学学位；她常光顾的肉店肉最好；她的孩子（那也包括我）是芝加哥最聪明的孩子。靠匈牙利领事馆一个好心熟人的帮助，她让人把我的高等中学成绩单（一门课一门课的成绩，一年级一年级的成绩）译出来，官方译件证明我已完成三年中学学业。结果是我13岁就被录取进入中学，班次在初级和高级之间。她这样投机，是因为我相当聪明，足可一跳四级。

由于这条诡计，我受的教育很不规则，显得奇怪（我从未读过任何一种生物学课程，但是我反复学解二次方程）；除此以外，也没什么害处。把我编人一班，班里别的学生个个比我大，

但是这没关系。照我的年龄说我是高个子，而且我很 cocky（根据我的词典，这词的意思是高高兴兴地自以为是或自信），语言问题一解决，我没有因年龄差异可能造成的任何社会问题。在此后的 10 年或 15 年我通常在多数团体中是年龄最小的人。在以往 10 年或 15 年当中，我成了团体中年龄最大的人；要把心理扭过来，惯于做年龄最大者，是很痛苦的。

当然，最初语言问题最大，而且很不幸，大约同时我必须学一门公民学课程。学这门课，语言最重要。事情更糟的是，这门课的老师斯洛克莫顿（Throckmorton）先生的口音我觉得难以听懂（威尔士语？），于是我们立刻达成友好的谅解。我只需要另一学期重修公民学；这个学期，我可以把这一课时用作自学时间，我们谁也不干扰谁。（在沃勒尔中学不存在常规办法“有退有补”。）

下一学期有了历史，由塔尔博特（Talbot）小姐教，这门课于我毫无困难。其实我很喜爱历史。这门课程是讲美国历史，宪法史是其中一部分。我学到的东西不够多。我组织了一次请愿，要求在这学期后的下个学期再加一门关于宪法的课程。但是请愿结果落空。

我接触的数学课程有代数和几何。代数从“中学代数”讲起。我喜欢中学代数（大部分我已经懂得）。我继续学“大代数”，因为大代数我作得也很好，我（仍旧在中学）接着学“大学代数”。顺便提一下，在大学里，一开始我得学“大一代数”，好为学“高等代数”（矩阵）作好准备。“高等代数”后是“近世代数”（置换群和多项式）。在研究生院这一连串代数才达到顶点，开的课程叫“代数导论”（环和域，像凡·德·瓦尔登（van der Waerden）书里讲的那样）。在这个程序的初期阶段，我在中学的两门课程里学过复数。复数似乎也不是特别神秘莫测。

中学生现在不学复数，可能是因为中学教师不懂复数，真叫我惊讶又沮丧。在最近一门研究生课程中，我遇到的学生们从未听说过棣莫弗（De Moivre）定理；甚至连绝对值和共轭复数他们也没把握。

欧几里得几何好玩极了。"明显"的说法硬要我们找出证明，写下来：第一步，理由；第二步，理由；等等。我喜爱这个，这一套我认为我比老师做得好。

最好的数学我是在物理课中学到的。例如，佩恩先生给我们讲那个关于兔子的著名故事：一群兔子按单调的时间规律继续不断地下兔仔。（肯定大家都知道这个故事，它是这样提法：每对兔子，一雄一雌，出生两个月后开始产仔，然后这些兔子继续不断地生另一对兔子，按规律一个月生一回。故事中的兔子一个不死。试问：一年后有多少对兔子活着？）这故事引起的问题我后来知道叫斐波那契数列。我没有解决这个问题，但是它给我留下了深刻印象。

我学的中学数学大部分是浪费时间吗？假使有人设计出有组织的课程，不含浪费时间的内容，我的数学会学得更好吗？我应当在 14 岁就接触不太简单的计算、定理和证明吗？也许是。我不能肯定，但是这一点值得思考。

我该去什么地方上大学呢？我父亲说，有两个地方他都供得起我去上学。（我后来知道当时他的收入大约是一年 6 千美元。）我可以上芝加哥大学，就在本城；或者上伊利诺伊大学，那是设立在厄尔巴纳的州立大学。我立即决定上这所大学。厄尔巴纳离父母家 130 英里，去厄尔巴纳就有自由。我选择厄尔巴纳。

从此我一直严厉责怪自己。我欣赏厄尔巴纳，也喜欢自由，我成了忠诚的伊利诺伊人。伊利诺伊大学不是坏大学，但是芝

加哥大学素有名牌学校的美名（现在仍旧有此美名，当之无愧）。在芝加哥，我所受的教育素质会好得多，以后为奠定事业须采取的步骤（联系，职业）要容易得多。啊，算了，下回我就知道了。

你在成长期间想做什么人呢？你过去一直想做你现在这种人吗？我不是。4 岁时我想做木匠，14 岁时想做药剂师，16 岁时想做化学工程师，18 岁时想做哲学家。在这期间，我也曾不认真地考虑过学法律。我买了厚厚的讲案例的书，可是只看了其中几页，我旁听了讲作证的课程（在迈阿密大学），还有民事侵权行为法和刑法（在印第安纳大学），以及罗马法（在爱丁堡大学）。

在伊利诺伊大学办入学手续时，人家问我想要学什么课程，我说化学工程。我学中学化学时就入了迷。化学不像物理和数学，对我来说是全新的东西，我极为欣赏。反应式的平衡非常圆满。我实在爱知道



$4Zn+5H_2SO_4 \rightarrow H_2S+4ZnSO_4+4H_2O$

我所以决定学化学工程，是由于工程师的身份起的作用。因为我喜欢数学，而且我不知道除工程师外谁还跟数学打交道。（更正：我喜欢当时我认为就是数学的那种东西。）我父亲是医生，两个哥哥也是学医的学生——医学与药学有关，药学又与化学有关。P. R. H.（我的姓名的首字母）跟 R. PH（注册药剂师）凑合一起，很适合开几个小小的玩笑。所有这些“理由”的深度和那种让 6 岁孩子想当消防员的老一套理由不相上下，可是因此我就宣布我的主修科目是化学工程。于是 1931 年 9 月我在伊利诺伊大学注册入学，学化学工程。

第二章　大学教育

迁居琛巴纳

从芝加哥乘火车到琛佩恩要将近个 3 小时，车费 4.56 美元。琛佩恩和厄尔巴纳是姊妹城市，有时合称琛巴纳。伊利诺伊大学大部分在厄尔巴纳，但是你一到那里就说不清你在什么地方——你跨过街道就到了另一个城市。两个市行政当局总算相处得够好，但有时候也产生混乱。例如，在统一时制法案生效以前的年代，就可能发生、实际也发生了这种情况：一年夏天琛佩恩要采取夏时制，但是厄尔巴纳不采取。假如有人请你在 7 点吃饭，你通常得另打电话弄清实际是要求你什么时候出席。

要习惯于在一个生疏城市生疏人中间生活，讲一种至今有时仍生疏的语言，做那种要求大一学生在确定方向的一周内应做的生疏事情——这一切即使对一个早熟的 15 岁孩子来说也是有不太小的压力的。到那里第二天晚上，我和其他几百名学生一起被赶进体育馆里一个极大的房间，一个篮球场，在乐队助理指挥雷·德沃夏克（Ray Dvorak）假惺惺的热情鼓动下齐唱“有微笑使你快活……”。我厌恶这种事，我瞧不起这种事，

我做这种事感觉为难；但是我唱了，唱得很高兴，也很激动。尽管我有反感，雷·德沃夏克还是达到了目的。事完之后我回家——“家”——回到纽曼宿舍去上床睡觉。我和斯坦利·弗莱(Stanley Fry)同住一个小房间，睡在房中相对两侧。弗莱是个瘦高个儿大一新生，伊利诺伊州法默城人，他被指定为我的室友。次日早晨，我排长队分别领取由一位不耐烦的科系代表带缩写签名的几十张卡片，这样才允许在修辞1、化学2和数学4等课程班上注册上课。

完全陌生。纽曼宿舍陌生——又长又空、冷森森不带生人气的监狱般的回廊，浴室在宿舍的尽头——斯坦利·弗莱陌生，餐票也陌生。学期末我迁出纽曼宿舍。斯坦利和我很要好了，但是我不想要室友，连他也不想要。至于餐票，在那个萧条年代倒十分合算。花4.50美元买一张餐票，票面上打孔总值是5美元。花5美元可以过一个星期。

过一段时间我才认识人，但我从来不真正有一大批朋友。我从这个宿舍搬到那个宿舍，从这个单元搬到那个单元，搬迁超过寻常，这就帮我扩大了我的相知的数目。在当时我的日记里还见得到他们的名字，但我常常想不起他们是谁了。菲立克斯·乔万耐里(Felix Giovanelli)？——噢，对了，他是每天翻字典查生词的那家伙。我竭力仿效他，可是尽管我已经爱上文字，一心想掌握文字，我还是不能按部就班坚持下去。顺便一提，我没有正规的日记来记录过去，我有的只是一小本袖珍式约定日记，提醒我将来的事。我记日记是从1932年开始的，那些小本子我哪一本也没丢。除一两本不知怎么遗失的不算，我仍旧全部保存着。现在这些小本子对我回顾过去是一大帮助。



P·R·哈尔莫斯，1931 年

如何不作大一学生

一学期大约为 15 周，每周你上一次课（通常为 50 分钟）所得的“学分”总量就是学期课时。毕业时要得学士学位就需要 120 个学分。通常读 8 个学期毕业，因此 120 学分就等于说每学期 15 个学期课时。

我查阅我在伊利诺伊大学的成绩记录，我心惊，原来我在

那里受的一般教育是多么恶劣无味。并不是说我腻烦了——我没有时间腻烦。我自己加紧。有一学期我上了双学期课时，而有一次，除16小时的课程外，我经过预备通过了特别考试，总共得到28小时的学分。这种情况，再加上一个夏季学期，我3年就读完4年的课。

头一年，有一门讲什么所谓卫生的课程是必修课。当时“自体中毒”这个词正时兴，人家告诉我们不要“自体中毒”。我属于尤达(Judah)大夫(他是位真正的大夫，不是哲学博士)那一组，我想他会为教我们的那套废话而感到惭愧。学年终了，我给他留下一张明信片，贴足邮票并写清寄达地点布达佩斯。(我要在布达佩斯过暑假。)这是想知道某一门课你的评分等级通常用的办法。他对此事有深刻的印象。他后来对我说，这是他寄到最远地方的一个A等。

体育是两年的必修课。因为我的脚有毛病(我两岁时坐电车受的伤)，我不能作径赛运动和打棒球或作任何一般运动——真不能，或者说我不是不能作，而实在是不想作。第二学期把我转到“矫正”体操组去。缺脚趾是无法矫正的，所以我必须做的也就是上相当多次的课，做几次俯卧撑罢了。我上课越来越不规律。四个学期我的评分等级B，B，C和D。我在大学本科时期只有历史课得过另外一个C。无论如何我还是喜欢历史课。这门课叫“古代世界”，它拿罗马基督教徒的社会地位跟美国共产党人的社会地位来作对比。

头一学期我上了一门德文课，可是我不喜欢这门课。它太容易，所以我不用功，所以它就太难了。我连唬带诈往下学盖森德尔弗(Geissendörfer)教授的德文课，说动他准许我参加以下三个学期的特别考试，这样总算满足了两年语言的要求条件。我想在学习过程中我忘的德文比学的多。

再说修辞。大一修辞（伊利诺伊大学的语言，英文作文叫修辞——逗号错误，分离不定式，每周一篇作文）有用也有趣。那以前我从未真正学习过英文，但我喜欢英文。我的教师彼得森先生是一位老处女式的人物，或许32岁，一个干瘦的高个子男人，仿佛是个永久的研究生，认真的军事教官，他把标点符号用法的奥秘讲得清清楚楚。他有点文化假内行气。我记得一天早晨在一场交响乐音乐会结束后他对我们表示他不赞成——蔑视？——那些没有来听音乐会的人。他似乎喜欢我。两学期他给我的评分都是A，而且（啊，真兴奋，啊，真得意）他还将我的一篇作文登在校刊"绿大锅"(the Green Caldron)上；校刊印出的是最好的作文。

无机化学和我的中学课程有很多的重叠。我从中学到的主要东西就是怎样用酸果蔓的果子制造啤酒。配方制法是负责我的实验室小组的那位和善的研究生希尔茨（Shilz）给我的。配方制法如下："一夸脱酸果蔓果和一夸脱水煮沸大约五分钟，酸果爆开。把果皮和种子滤掉。加一杯糖和半块酵母。发酵36小时。装瓶，存放一星期。饮用。"我一直没胆量试试这方法。

说到饮酒，当时是禁酒时期。啤酒很难得，我有时弄到的家酿不是味。烈性酒容易买到，但是很坏。我何时想要"杜松子酒"或"布尔本"①（酒力强，除此以外令人怀疑全是假酒），就打电话给卖私酒的巴尔尼(Barney)，告诉他我想要的东西，以我的密码自称。(我的密码是3—3—11，即我的生日上推5年。)半小时后巴尔尼和我在约定的街角见面，交给我酒换回美钞。杜松子酒和布尔本都是每品脱1美元。

想弄到威士忌还有个好法子，但是你需要在化学系有朋友。

① 布尔本（bourbon），一种烈性威士忌酒。——译者注

从那位朋友弄来两三升优质的实验用纯酒精和两三升蒸馏水。在药房可以买一小瓶“布尔本精”，大约如小指般大的一小瓶。布尔本精是非酒精类物品，它起的作用是着色。把酒精、水、布尔本精放在酸坛中，用软木塞塞紧瓶口，在地面上滚动酸坛。这叫“使酒老化”。结果就可得到一加仑浓威士忌。

话归本题，再说化学。我认为实验室工作是瞎浪费时间，对学生毫无启发。从来没有人跟我讲，我也从来不理解，实验室可以教给你新的事实和见识。我把实验看成不过是指派给徒弟的那种杂务（就像德文中的不规则动词和钢琴的指法练习），徒弟在练会这些之后才能成熟练工。我预先知道每个实验打算证明什么，于是我就证明它。我简直是无情地作假帐。在年终之前我已知道化学对我不合适，我准备转到一般文科课程去。关于我的主修科目，我犹豫不决。我想，大概是数学或是哲学。

卫生、体育、德文、修辞和化学，这几门再加上数学，就是我的大一课程。我和这种东西太接近了，看不出这种东西有多么浮浅——没有叫我为难，没造成我精神的过度紧张，对我的文化修养、智慧或理解力也没什么帮助。

三角和解几

我在大学第一年所学的东西，大部分不是在课程中学的。例如，我学会绕过注册制度；第二次注册时我没排队，7分钟内就从头到尾办完手续。我的成功秘诀是我阅读、理解了本校概况一览，观察并理解了注册部的官样文章。我知道哪些课程是必修课，哪些是任选课，而且我知道注册卡上的首字母签字主要是想避免可笑的冲突和极愚蠢的事情（也是想避免班里人数过多，但是如果你来得早，这决不是问题。）我作出一个切实的学

习计划，在我的注册卡上伪造看来像样的缩写签字，就直奔交费窗口— 7分钟。

我没有学到的是怎样学习，或者说，学习是什么意思。以我的聪明刚能知道学习不是指记住。但是我的确认为所谓学会什么主要是指记住什么。别人教我的一切向来都是这么教的："这就是做的方法——现在你来做"。别人就是这样教我数数、写字和解代数题。我不懂所谓懂什么是什么意思，要怎样做才能懂。

在大一那一年，教我的数学是代数（旧东西）、三角（学得太多）和解析几何（新发现）。

我的三角老师是一位研究生助教，姓名已不记得。他教我邻边比斜边（全新），用对数来"解"三角（麻烦无比的事）。他也教我等式（极有趣，像作容易的拼板游戏）。很久以后，当我开始教三角等式时，有个灵巧学生告诉我他有一个简单透顶的方法，几乎每次都能得满分。假如要你证明某个式子A等于一个表面上不同的式子B，你就把A写在纸页的左上角，B写在右下角，应用正确而简单的代换法，不断改变A和B，从两头向中间凑。A和B凑到一起时即停。如果给你的等式是真等式（总是真等式），那么写出的每一步都是真的。确实，在纸页中心附近要有巨大的一步，很可能像原题那么大，但是阅卷判分的人很少会发现它，即便发现，也不敢给你判低分——毕竟是真等式嘛！

除开白日梦和解析几何不算，第二学期和第一学期很相像。我身着工程师制服（棕色灯芯绒裤子，腰带上悬挂一把摇晃的计算尺），我为考试发愁，拚命赶功课，我读高乃依，读费尔丁，读拉辛，尽力找女孩子，跟她约会。我住在伊利尼宿舍，它是后来巨大的工会大楼的老式前身，没有太平门等防火设施。我

甚至在那里找到了一份非全时工作（扫楼梯，清洁喷水池）。我的想法是存够钱，向父亲提一个似乎有理的费钱的建议，夏季去欧洲一游。

我的白日梦是离开此地，到别处的大学去读书，到一个迷人的地方去。我梦想着法国、德国、俄国和阿根廷，梦想着马德里、爱丁堡、伦敦和洛杉矶。我在图书馆查阅大学概况一览，写信向我能查到的许多大学提出请求。(我写去信的所有大学都有回信，除一所大学外，所有大学都给我寄来一份学校概况。爱丁堡大学除外：它回复我上月 7 日的信，信中说我如果转给他们一张 2 先令的邮政汇票，学校概况就会寄出。(苏格兰式玩笑到底是真的吗?）白日梦完全落空。

解析几何真了不起。开头先讲笛卡尔的伟大胜利，从几何作代数、从代数作几何这种见识。它完全是讲图形，主要是讲圆锥曲线。用三种方法来定义圆锥曲线：当作锥体的平面截面来定义，借焦点和准线来定义，由二次方程来定义。圆锥曲线有偏心率和 latera recta[①]（要求我们记住这是 latus rectum[①]的复数形式)。还有双纽线和蜗线，大多数现象都有三维讲法（但是在课程近尾声时忽略了)。最大的奥秘称作简化和旋转。我一直不理解这两个词要作为同义词：要求我们靠旋转什么来简化什么。从未提到线性代数（向量和矩阵)。我认为它真是了不起的东西，在我写给家人的信里，我热诚地说起我的数学课。我说，它是个美女。

在那个年代，认为微积分对大一学生来说过于深奥，所以推迟到二年级才学。(谁似乎也没注意，微积分实际使用的解析几何内容、几乎只是关于图形概念的那一部分，我们未入大学

① 拉丁语：正焦弦。——译者注

之前多数人就懂得那个。还有条规则和现在的规则不同：不允许研究生助教讲微积分，在他们做研究生的头一年，根本什么也不允许他们教。

我的一年级数学课程的内容，大部分在有名的大学不再教了；一部分挪到中学，其余的全忘了。这样好不好？我不知道，我真不知道。

微积分，系里有博士吗？

1932年夏，我去匈牙利。横渡大西洋要7天。我坐的是阿奎塔尼亚号（S. S. Aquitania）三等舱。从此以后我决定坐头等舱旅行。我一向并不总是能守住这个决定，但这并不是因为缺乏努力。9月我回美国；下次我去匈牙利是在1964年，那是32年以后的事了。

我保有大学年代的一些记录——分数单的抄件、约会日记以及很少的书信，但是甚至根据这些材料，我记得的日常生活情况还是少得莫名其妙。这些材料帮我回想起我读罗伯特·瑟维斯（Robert Service）的打油诗，我读赛珍珠，我买来林得·沃德（Lynd Ward）壮丽的的木刻“小说”《上帝的人》欣赏，后来丢了。一个名叫查尔斯·埃尔斯金·斯科特·伍德（Charles Erskine Scott Wood）的社会主义者好嘲弄传统，富于风趣，他写的《天堂谈话》给我的印象很深，书中所有的人名50年后还牢牢地留在我的记忆中。但是举个例，那位查克·爱德华（Chuck Edward）是谁呢？很有一段时间，我似乎至少每周跟他接触一次——我认为他很和气，他是我喜欢的人——可是他是谁呢？

我读大二的一年是微积分年。那时微积分不是我生活的重

大事务，只是琐事，要了我的命我也弄不懂。B 是我做得到的最好成绩。我会求一切微分和积分，但是我不明白教科书中所谓的“四步法则”是什么意思。(我现在知道：意思是“应用定义来求导数。”) 那时的教科书是声名狼藉的“葛·斯·朗三氏微积分”[①]。谣传这本书给每位作者带来的版税收入有好多万美元，至少持续了 20 年。书非常坏。讲解不像讲解，既不清楚也不正确，纯粹是烹调书里的说明，仅此而已。此书所以畅销，是因为它有许多习题，几乎全是常规的机械性习题。多少年后，我听说它已经译成法文——古尔萨 (Goursat) 及别人写的“分析教程”的语言，实令我大吃一惊。

我的微积分老师是亨利·罗伊·布拉哈纳 (Henry Roy Brahana)。他是个高个子，面孔凸凹不平，经常是嘴唇微张，左右摇晃。他看样子像是个进了大城市头脑给弄迷糊的农民。他往往语无伦次，在我认识他的这些年，他从未真正说全一个句子。他努力工作，争取做数学家。他研究四色问题，但他主要是详细考察许多 P^n 阶 (1，1，……，1) 型的特殊亚阿贝尔群。我佩服他只要看着一个 3×3 矩阵，就能计算其平方的能力。到现在，如果不把两个矩阵并排一起 (或者，若求平方，同一个矩阵写两次)，我仍不会作到乘以行的乘法。布拉哈纳是个和善的人，他对指导我，向我提意见有兴趣，可是 (上帝饶恕我！) 我过去一向称他 Doc[②] (后来我对他了解得清楚些，我们成了朋友，就可以叫他罗伊了)。

学术界的称呼方式不是很奇妙吗？在非一流的地方 (锡拉丘兹大学和夏威夷大学可作为实例；我曾在这两个大学数学系

① 这是旧时中译本的通用书名。原作者是葛兰维尔 (Granville)，斯密司 (Smith)，朗莱 (Longley)。——译者注

② 英语中 Doctor (博士) 一词的缩写。——译者注

工作过)，"Doctor Jones"（琼斯博士）是称呼 Doctor Jones 的方式：他和他所在的机构一刻也不想要你忘记他曾赢得这个大荣誉。(请勿用"Doctor"或"Doc"——这条规则同样适用于一流地方和十流地方。"Doctor"意思是医生，用这两个词都流露出外人对习俗惯例的无知。)有的讲师可能没有博士学位；他们和照管房屋的工友都称 Mr. Jones（琼斯先生）。[作必要的修改：女讲师没有博士学位的，是 Miss（小姐）或 Mrs（夫人）或 Ms（女士）。]助理教授虽然在学术排行上名次低，若不是博士，也要称 Professor Jones（琼斯教授），对副教授和"full"（正，即不加形容词限定语的）教授也如此。总之：在低水平的地方，"Doctor"（博士）正合你的身份，"Professor"（教授）是一个不好的替代称呼，而"Mister"（先生）则令人遗憾了。

在水平较高的大学（伊利诺伊，或大部分州立大学），想当然每一位在编学术人员都有博士学位。称某人琼斯博士，只是为把他和照管房屋的工友区分开。在那里你被称作琼斯博士，直到你被提升为教授（大概前面带形容词），从此以后就称你琼斯教授了。别忘了陆军并不区分（至少对呼格并不区分）橡叶上校与鹰徽上校，同样，大学并不区分助理教授与副教授。

在几所超高级的大学如芝加哥，学术上的势利风气达到最高水平。在那些地方，认为博士学位太没分量，不能给你任何身份，若论身份，一切通常的身份象征和"人在那里"这种光荣相比都失效，所以任何身份称呼也不用。你是芝加哥的琼斯先生，无论你是青年讲师，上年纪的教授，系主任，院长，校长，理事或管房工友，对于你的秘书、对于学生、对于街角的报童，你就是琼斯先生。[可怜的查克·麦克鲁尔（Chuck MacCluer），这一切我都教他了，我请他叫我先生——他一开始是叫我博士的——于是他对我的一位密歇根大学同事也叫先生了。]

除你的同事外，对于每个人你都是琼斯先生——在同事们中间有个神圣的传统：无论你是25岁的初来者还是65岁的离职者，在吃茶点时、在系会议上你一定是比尔。[1]按生年的时间顺序说，由上往下容易这样叫，由下往上头几次就难开口。但是由于执意避开名字是对人的侮辱，我们很快就都学会不避讳名字了。

初等数学和文化素养

数学是我的生活中心，半个世纪一向如此。但是我在伊利诺伊第二年，大半时间我的心态仍旧是二年级心态[2]。我选修一切课程来满足需要，在社会生活和文化上花费大量时间。

除微积分外，我修的唯一数学课程叫立体解析几何——大概是要对线性代数有一个缓慢而从容的初步浏览。这门课由维克托·贺尔士（Victor Hoersch）教。此人身材高大魁梧，一头波状灰发，嗓音和风度像是一位得克萨斯老政治家。课很枯燥，非常枯燥，贺尔士常常在黑板上仔细写出4×4矩阵，所有16个aij都写全。坐我旁边的一个女孩子——我和她有一种很好的天真关系——假装恼火，因为我没作自己的家庭作业，而是在课时的开头一段时间（当贺尔士写下标时）抄她的，准备好在课时末尾交上。

那时在伊利诺伊有许多像贺尔士这样的人，这种人的一生工作不是数学而是教数学，亨利·迈尔斯（Henry Miles）（他是我大一的代数老师）就是一位；我16岁时（他30几岁）看他像是中年，40年后我见到他，他还像是中年。他永远不变。他

① 比尔（Bill）是威廉（William）的昵称。——译者注
② 指好高务远、自以为样样都懂而实际上浅薄无知的一种心态。——译者注

是个好人，一个和善的人。他留小胡子（在匈牙利，大家向来管它叫英式小胡子），在老式相册中见得到的我们的父辈留的那种胡子。他嗓音柔和而清晰，机智敏捷，智慧与性格足以使任何自以为聪明超过他的任性的本科学生就范。他曾严厉对待一个本班同学，因为他打算搅散一次测验，净问一些其答案他既不想知道、显然也不会懂的问题。亨利并非数学家，但是他在本职工作上极为出色。他喜欢人，他喜欢讲解事情，也懂得如何讲解。他风度优雅地老去。在50年代什么时候，他被宣告患不治之症（白血病）只能再活一年。结果他多活了20多年，身体健康、情绪良好。

至于社会生活，我的意思只是说我记得许多聚会、结夥吹牛和约会——许多与人欢聚浪费时间的办法。我认识了几个研究生，有一段时间我们这帮人一起租了一套单元房，过着豪华生活。我们每周轮流做家务（包括做饭），做得十分认真：地毯用吸尘器除尘；正餐不是汉堡包和冰淇淋而是烤牛肉和自制香蕉奶油饼；盘子每顿饭后洗净擦干。阿尔·伯顿（Al Burton）和拉尔夫·麦考马克（Ralph MacCormack）在化学系，基基·康得尔（Kiki Conder）在动物系。我是这些人中唯一学数学的学生，唯一的本科生。阿尔为写论文正作着研究，经常早上5点就得起床，赶到实验室去开电门，这是他要做的全部事情：开电门，这样他上午的活就干完了。可怜的老拉尔夫，一个第二代化学家，生来心脏有毛病，因此中年早期就死了。基基研究乌龟。他的过去经历一波三折，包括一段当宣教士的经历。他酗酒。在烤馅饼之前，他总要摘下假牙，用它来清除残留的饼皮，沿饼盘周边利索地“喳喳”一阵刮。

文化是指文学和音乐。詹姆斯·司提芬斯（受以前曾和我同住一室的爱尔兰同学的影响），和圣奥古斯丁（我终生对天主

教有情，终归无效），蒂法尼·赛耶（Tiffany Thayer）（30年代淫秽文学的法律极限）和皮兰德罗，詹姆斯·布朗奇·卡贝尔（James Branch Cabell）和G·K·切斯特顿，摩纳尔（Molnár）（毕竟我是出生在匈牙利）和柏拉图，亚里士多德和莎士比亚（我爱读《亨利四世》和《亨利五世》），路易斯·卡洛尔，和伊弗林·沃奥——我的趣味没有集中焦点。有些读物，一小部分读物，是我的英国文字老师比尔·坦普尔曼（Bill Templemann）提出的，他开了两门英国文学课程，分别讲18和19世纪。（后来我们成了聚会的相识，一起吃喝过几次。——所以称“比尔”。）他是个“好老师”——讲得清楚，有启发性（我现在心想，他是不是学过教育学课程），比他的学生精明。

在音乐方面，我曾是浪漫派（勃拉姆斯），直到我结识瓦伦·安布洛斯（Warren Ambrose）时为止。我不记得我们初次相会的时间了，但这次相会是我们最长久、最亲密友谊的开始。我们一起上好几班课，我们谈哲学、数学、性、政治和音乐。学数学，他落后我一两个学期；微分法的奥秘尚有待他去领略，我跟他一谈起来便自觉老成有智慧。他介绍我欣赏巴赫的《G小调小赋格曲》（通过斯托科夫斯基的管弦乐改编）。从此我（和安布洛斯不同）成为彻头彻尾的音乐上的反动派。粗略说来，我的态度是莫札特之后的音乐毫无可取。我并不真的是这个意思，我指的是大部分音乐。贝多芬有些作品很好，甚至普罗科菲耶夫有的作品也不错。但是德彪西和斯特拉文斯基，当然还有欣德米特、勋伯格、巴尔托克、柯达伊、科普兰及凯治（可怕!）等人的作品我都听不得。我的反动精神也有例外，主要例外是我喜欢某些种花哨而感伤的曲调：匈牙利吉普赛音乐、约翰·施特劳斯、约翰·菲立普·苏萨和斯考特·乔普林的乐曲。

“文化”这个词有时候用来指人类在千百年当中累积的艺术

作品：诗歌、戏剧、各种文学、绘画、雕刻、建筑、音乐——我是不是漏掉了什么？这种意义上的“有文化”，就是说和很久以前过去的人有接触，和仍在世的人共享（文化）遗产，除艺术带来的满足外，还有一种用别的方法得不到的感受和领悟。要想活着而有文化，我们必须一生继续不断地看和听。但是我坚信，人若不是在童年就被塑造成活着而有文化，谁也不能成为活着而有文化的人。18岁太大了，14岁也太大；我崇拜6岁时的威尔第，一切6岁孩子，崇拜10岁时的伏尔泰。公共汽车司机和我如果12岁时都听说过法尔斯塔夫——没有理由说我们不会都听说过——我们就会有许多共同点。音乐和诗歌比汽化器和微积分重要，因为公共汽车司机和我如果有更多的共同点，我们就会成为更好的人，而且因为我们那时就可以协作得更好，生活在一个更合情合理的世界。

数学白日梦和BARBARA[1]

慢慢地，慢慢地我开始醒来。在我的大二学年的中段，我在袖珍日记中写出总括积分的基本定理的公式。在那一学年将近终了时，我写了少数真像日记的日记中的一则："我越来越相信，我主修数学算是找对了我的方向。"

在同一时期所作的别的笔记当中我发现以下这些白日梦问题当时我认为很深刻。"n边多边形有多少对角线？"（我丝毫也不知道，但这是一个值得重视的初等组合问题，在有关此题目的数量激增的书籍中任何一本里肯定能找到关于它的讨论。）"有没有适用于分数指数的二项式定理？"[当然：牛顿和莫里亚

[1] 形式逻辑中三段论第一格的第一式。——译者注

蒂（Moriarty）教授一辈子没有白活。]"有没有不确定位置的坐标——能不能给不占空间的物质对象下定义?"（我是要创造流形吗?）也提到非欧几里得台球而未加解释。

我17岁。女孩子很重要，约会，跳舞，聚会。我参加过几次足球比赛和一次返校节舞会，在厄尔巴纳附近的庄稼地里和墓地之间独自散步，自得其乐。那年我的分数平平，逻辑是我得A的惟一课程。

逻辑不是数学——在那个年代不是，在伊利诺伊不是——它是关于三段论的迂腐的、分类的、经院式浮浅的研究，写教科书的人把它压缩到大学二年级学生的智力水平。虽说我似乎不能记住正确三段论的名称，我凭观察就知道哪些三段论是正确三段论，那些无谓的分类概形（像什么逻辑方阵），让我感觉可笑。从逻辑中和通过逻辑，我发现了哲学，那以后有两年半时间，我把一半以上的学术精力花在了哲学上。

在逻辑方面我立刻成为赞成者：我在霍巴尔特（Hobart）补习代理处登记，给那些不能解释BARBARA及其他正统三段论的学生们讲解这些三段论，挣几个美元。霍巴尔特先生开这个代理处是因为在当时萧条年代他找不到教数学的工作。他是个老于世故的先生，一头白色秀发，仪态动人。《伊利诺伊斯日报》上几乎每天有他的广告。广告就跟下使用的A，B，C，D，E记分制，宣称E+霍巴尔特=A。我们这帮"雇农"都管他叫A－E。

哲学系里唯一对逻辑有点兴趣的人是奥斯卡·库比茨（Oscar Kubitz）（当时为助理教授）。他教我形式逻辑，更重要得多的是，他跟我谈到罗素和怀特海的《数学原理》（*Principia*

Mathematica)。当然我至今从未读过PM[1]但是我在各时期都保留着这三卷书，我一页一页翻下去，尽力密切注意书开头的散文风格，我费力学了书开头讲的那些p和q，以及粗体字命题联结词。

全高卢

在30年代的伊利诺伊，数学就像尤里乌斯·凯撒治下的高卢，被分成三部分：代数、分析和几何。应用数学要不是不存在，那就是关于它的消息没有传到我们本科生的耳朵里。统计的确存在，但是份量不多，也不太重要。我在1933年暑期班把我的第三学年即本科最后一年分为全部高卢，开始读那一学年。(那是一个忙碌的夏天。在短短8个月一期中，我设法得到一整学期的学分。除代数、分析和几何外，我又修了一门哲学课，参加了一场英国文学的计分考试。我只有哲学得A。)

詹姆斯·毕尔尼·萧（James Byrnie Shaw）教的代数是一门软性课程。提到群和域，但它主要是在已往所谓的方程式论的一些部分内所作的连续的漫步。n次多项式方程有n个根；这些根的初等对称函数是好东西；三次曲线和四次曲线可以求解。

萧就要退休了。他是一位相当有名的代数学家，一位老派的高雅先生，照非恶意的私下可乐的传言说，他爱好对满教室女生讲大一代数远胜过给满教室男生讲课。有个传言更率直：它是说他班上每个女生都得了A，每个男生都得了B。他在给最后一班讲最后一堂课时我在场。他讲完了微一鞠躬，面带温和笑容，说了一句半得意半怀念的话："这就是教书50年的终了。"

① "Principia Mathematica" 一书的通用缩写。——译者注

分析是斯坦姆莱（Steimley）教的，他教书像一个海军军士级教练员。他准备好他教的高等微积分的详细笔记，反复使用。他给家庭作业和考卷判分判得又快又模糊。你的分数不大可能就是B或80分或85分，总是83分的样子。你的平均分小数点后的数字对确定你的课程分数可以有很大作用。他敏捷伶俐，强迫性的讲求条理——他的记分簿，他的集邮册，他的唱片都分门归档，登记卡片，可以互相参查。因为我也常不免有类似的强迫心理，我们感到彼此同情；他乐于给我谈他的分类法，我也乐于知道。我永远忘不了他留的一道家庭作业题：利用一幅照片在曲线纸上面向上画你自己的侧影，以一个傅立叶级数来逼近此图形，达到规定的精确度以内。我往往要责备斯坦姆莱让我一直没学会高等微积分。他的教程使我贸然下结论，认为古典分析无非是不值钱的簿记——围绕着格林定理和斯托克斯定理的整个一套概念，对我来说一直是模糊不清的奥秘。

几何是根据格劳斯坦（Graustein）编写的那本当时很著名的书。这本书主要是射影几何，程度保持在初等水平。内容是齐次坐标、无穷远点、交比及德札尔格和帕珀斯定理。讲法则是综合的（即公理的）和分析的（即坐标化的）讲法参半。但像射影几何基本定理那样现代的奇特的东西丝毫未触及。

哈里·莱维（Harry Levy）是我的几何老师，不是旁人正是他指给我脱出本科数学的途径。他是个很好的几何学家，算不上好得出众。我后来听人说他坐失时机，令人痛惜。他本来有机会在微分几何方面有重要发现（对称空间?），他几乎发现了，但是忽略过去。每当他走上未来的光荣之路，他立即把它舍弃，说这种实例显然不会存在。他是个丑得可爱的人，大鼻头，麻子脸，诱人的粗俗地咧嘴的笑。康托尔曾证明 α 永远小于 2^{α}，当我学会这个证明时，我匆匆去见他，渴望让他分享我的新知识。

他神色和蔼地听着，然后挥挥手——没错，没错，这又是一个悖论证明。

他教我很多东西。我曾听他讲复球面上的无穷远点，他不肯使用∞符号——他使用一个星标，给我留下深刻印象。超出他的职务范围以外，他还教我图书馆技术。我们走到数学图书馆去，他指给我看"半年评论"、"年刊"和"数学文摘"，以及其他各种数学知识和数学智慧的来源。自那以后，我不时为我的学生做同样的事。我做的时候总是感到暗自得意——你瞧！，现在我长大了，现在我做着哈里·莱维做过的事。

哈里·莱维也指导我的学士论文。我选题自写一篇（当时已不再要求写），因为这样我就有资格得优等学位。主题是射影几何，内容我还记得。我的想法是取两本书［一本是"维布伦和扬"(Veblen and Young)，一本是"库利奇"(Coolidge)］，两本书各为射影几何提出一个公理系统，然后比较这两个系统。因为两本书的主题是同一个，"比较"的意义就成为证明这本书的每一条公理是那本书中一个定理。

科学学士

1933年夏季可能很忙，但是随后两个学期则忙到极点。头一学期我取得28小时学分，搞了点世界语，开始读《效法基督》，大大集中精力学哲学，修了一门优美课程"挪威神话"，仍是手不离数学。

哲学分量很重，共有三门课程，最好的一门是科学哲学。下一学期我又选修了三门哲学课程，最好的一门是形而上学。两门最好的课都是D·W·哥特夏克(Gottschalk)教的。哥特夏克是个瘦小坚强的人，罗马式鼻子，两眼炯炯有神。我喜爱哥

特夏克讲课。他讲话很快，声音洪亮，有火一般感人的热情。我尽力听讲，力求理解，同时仔细作完全的笔记；每堂课终了，我总是欣喜若狂、精疲力竭。哥特夏克曾发展一个复杂而“精确”的宇宙论学说，斯宾诺莎式的，有定义、有证明。（“精确”二字加引号，是因为后来我从职业数学家的观点出发，认为它根本谈不上精确。）下一个夏季，在我取得学位以后，我花几周时间整理我写的哥特夏克的形而上学笔记，用打字机把它打出来。这是件兴趣活儿，没有想像得到的潜在动机。结果就是一本挺大的书。这本书早就丢了，书的内容也忘了。

弗洛姆（Flom）教授教我挪威神话，下一学期教易卜生。挪威神话我只得了个 B，但是我敬爱他。他是个顽强的挪威人，性格冷峻，学问也冷峻。他不但一方面讲宙夫[1]、宙斯和雷神的相互关系，另一方面也讲维纳斯、阿芙罗狄特和弗莱娅（Freya）的关系，而且暗示出爱和自由在字源上的关联。（弗莱娅是爱情女神，她的名字和“自由”freedom 一词的相似并非巧合。）我注意到 Thor's day（星期四）属于西班牙的宙夫（Jueves），而 Freya's（星期五）则属于维纳斯（Viernes），我发觉这些全是令人陶醉的东西。弗洛姆一丝不苟，他从不吓唬人，所以我喜爱他的课程。我写给他一封狂热的信，谈我的最后考卷（“我的本科生涯中两门最好的课程”）。从此我一直没听到他的消息，他所说的话很多我全忘了，但是如果可以说我还有点文化，这大部分要归功于他。

除了我在毕业论文上下的功夫以外，我通过三门薄弱课程一直手不离数学：欧几里得几何的高等内容、数学的基本概念和概率论。概率论本可能是门好课，实际不然；它也就是关于

① 即朱庇特。——译者注

排列组合的一大堆趣味数学问题，没有定理。大数定律根本没提，但它似乎是一件经验事实，在背景上回旋。中心极限定理也根本没提，但是我们看高斯分布的一些性质，把它看成是上帝的神秘行为。

赖特尔（Lytle）教授教欧几里得几何。我记得他是个瘸子，小儿麻痹症可能给人留下的那种瘸腿，我还记得他的白发和他那副和善、安详、老爷爷般的面孔，这总比瘸腿好得多。他通常是为那些准备在皮奥利亚教中学的活泼而智力迟钝的学生开非常规的课程。我由他学到许多关于九点圆的知识，超出我现在想知道的事实范围之外，但那时我倒很欣赏。我画了一个巨大的三角形，一切都在它上面——内切圆、莫利（Morley）三角，当然还有九点圆和很多别的。我喜欢赖特尔，他也喜欢我。我申请做研究员的时候，请他为我介绍。他的神色悲伤而和善，告诉我该请谁给我介绍——他的介绍信不会有多大帮助。

就是这样——这就是以数学为主修科的大学教育（或者说哲学为主科，如果我愿意那么说；我满足了这两科的要求）。在数学方面，我不仅没有灵感，还无知得惊人。外尔施特拉斯（Weierstrass）、豪斯多夫（Hausdorff）、庞加莱（Poincaré）、伽罗瓦（Galóis）和凯莱（Cayley），对我来说纯粹是传闻；我丝毫不知道正经的ε一分析、集论拓扑或代数拓扑、代数，甚至线性代数（除4×4矩阵乘法外）。但我却是科学学士——伊利诺伊大学，1934级——而且是一个Phi Beta Kappa[1]。

① “ΦBK联谊会”（美国大学优秀生和毕业生的荣誉组织）会员。——译者注

第三章　研究生院

统　计　学

学士学位甚至没有打断我阔步前进的步伐。我完全没想一想——理所当然我要继续进研究生院。资金是个问题但不是障碍；我父亲继续帮助我直到我22岁，能开始挣点钱。学什么？——这是个问题。我跨哲学和数学两边。每一门本科哲学课程我都得A，而且我认为我懂哲学胜过数学——所以我决定学哲学，但是我再次想要手不离数学。我选的课程叫“统计理论”。

在30年代，统计不是一门主要行业，我不能立刻记起当时是否存在什么重要的统计系。对统计的前途有影响的人接受的都不是统计学家的训练：例如威尔克斯（Wilks）和瓦尔德（Wald）当年都是学数学的学生，而塔基（Tukey）（和我大致属于同时代）早年成名是靠写一般拓扑学方面的论文和把佐恩（Zorn）引理的作者归之于佐恩。很久以后，我在推动芝加哥大学成立单独的统计学系（成功），更久以后推动印第安纳大学也成立（未成功），这两件事上都出过力；伯克利，哥伦比亚、普林斯顿和耶鲁及其他大学重要的统计学系，是在我的专业生活

后期诞生的。

统计在伊利诺伊的研究生中间不是很受欢迎的科目；代数几何课程的注册人数要多得多。确实，代数几何是“预试”（博士学位考试）硬性规定的要求的一部分，统计学不是。胚胎形式的统计学是克雷松（Crathorne）教的，他个人受到的训练是变分法。他主要是因为写了一本畅销的大一代数书而出了名。我选修他的课程的时候，他已接近事业的终点，而且他不是充满活力与热情。他说话声音柔和，常爱回忆往事，容易给好分数。

克雷松给我们讲“学生”t 检验和卡方，叫我们作了不少计算。用一种台式机器来作计算；要乘以 37，你就打入另一个因数，把手柄摇七次，翻动变换杆进一位，然后再将手柄摇三次。除法是反复作减法（手柄要向后摇）的一个稍复杂的程序，求平方根更为精巧，必须求时我会作。

在我学统计的一学年终了，我写了一条短日记：“克雷松剃去小胡子，成为正教授。”当时他大约 60 岁。

事情终了

研究生院的第一年是忙碌的一年，而且没有一个美满结尾。第一学期我制订了一份一周工作表，周一至周六，上午 8：00 至下午 8：00。主要项目是法语、伦理学、柏拉图、统计学和打字，给每一项分配了适当的学习时数。

我认真练打字。我在伍沃思商店买了一本“自学触键系统”小册子（10 美分），每天午饭后练半小时，练了几个月。我触键打字打得很好了——不算超等，只是良好。我出错，但是我可以打得快，此后 25 年左右一切都由我自己打字——通信、课堂笔记、考卷、文件和书。在晚年，哪个博士生来找我，头

一件事我要问他会不会打字，若不会叫他去学。有一段时间，这做法别人认为很古怪，然后认为过得去，但是现在，许多行政人员桌上都有电脑，这可能又成了合理想法。一次我读到，一个任何方面的专业者的真正标志是他理解、他爱好并擅长他的艰辛的职业。这条箴言给我留下深刻印象，于是我轻拍自己的后背；我肯定我对打字的态度帮我证明我是一个真正的专业者。

法语是准备为博士学位阅读考试时使用的。德语我不发愁（虽然我得在它上面多下点功夫），但是我是个恐法病患者（一生都是）。我从来没学过法语，从来没在法语国家居住过，我以猜疑和不信任的眼光看待大多数法国人。在我的日记小本子里有这样的话："查改变词根的法文不规则动词"。我完全是自己学法语（没修课程）；我也就是查阅足够的语法，记足够的短词勉强对付（长词毫不重要——我对付得过去）。考试很简单：把新东西，以前你没见过的东西译成英文。分两部分：45 分钟可以查字典，45 分钟不能查。主考是哲学系的尼科尔森（Nicholson）。后来他告诉我说我及格了，又说我的译文是他见过的最自由的译文。可是我及格了，我的德语也及格了。从那以后我一直吹牛，说我是在做哲学学生时，翻译很难的文字考及格的，不是在做数学学生时考及格的。数学容易得多，纸面上的公式，或者说句子里的公式，充分暗示你文字是什么意思。

当然，我不是一直都在学习——我读书（《早餐桌上的独裁者》，《资本论》），我常下棋。1935 年初日记中写着："莫菲想必是个天才。"我帮助组织一个小小的国际象棋俱乐部，我还是 CCLA（美国通信象棋联盟）的热心会员。一切都过去了——我忘记奥利弗·温得尔·霍姆斯（Oliver Wendell Holmes）的意见，我不再对马克思大气磅礴的散文留有深刻印象，我也不再有十分把握可以顺手吃卒。

不过，最重要的不是法语，或统计，或打字，或象棋，而是哲学——第一学期伦理学和柏拉图，第二学期洛克—贝克莱—休谟和德国唯心主义。我想要认真对待哲学，在哲学上努力用功，但是不知怎么，我们的恋爱，哲学和我的恋爱很早就出了岔子。

那时期我记真正的日记——噢，几乎是真正的日记。那是个小本子，大小大约像一本袖珍本纸皮书，每个日子用四条短线分开成为5年：从1935年1月1日至1939年12月31日。我记人的事项必然是电报体的文字，有时候看不懂。1935年记下的事项不少是关于哲学课程的，我最近重读这些日记，发现它是多么尖酸刻薄，感到震惊。“柏拉图课平平常常……柏拉图考试滑稽可笑，令人厌烦……洛克—贝克莱—休谟令人厌烦……引不起兴趣的康德课……康德课失控。”也有些不那么气量狭小的不快表白，例如这种牢骚，“哲学就要完蛋了吗？”和这种幼稚的嘲笑：“要做哲学家，你就得有一个灵活、多产而无用的头脑。”先有哪个：我的敌对态度还是哲学系对我的低评价？我十分愿意相信，作为学哲学的学生我根本不行。

这场戏里的反面人物，同时也是主角，与我最有关系的哲学家是格兰·摩若(Glenn Morrow)。他是个有尊严的人，一个干净利落的人，想到他我就想到棕色——棕色小胡子，棕色领带和擦得光亮的舒适的棕色皮夹克，名牌大学派头。在和他的一次商谈后，我在日记中记下：“摩若是君子”。

摩若指定我作一次课堂报告，论康德的“纯粹理性批判”。我为此进行研究，准备报告，非常仔细地整理报告。我把主要提示词写在3×5卡片上，并附有关的参照项目和引文。预定时间到了，我们5个学生和摩若围坐在讨论桌旁，摩若看我一眼点点头，我就掏出那一沓卡片。摩若皱眉头说：“你就有这些吗？”

"是的，先生。""你没把它写出来吗？""没写——我认为这样我可以讲得更好。""好了，讲吧。"这不是个好开头，但不管怎么说我的报告进行得相当好。我是这样想。

当然，我没经验。自那以后我懂得了，有些题目，一个学者在学术集会上"宣读论文"就是照本宣科——也就是把他面前讲桌上那张纸上打印的话大声念出来。哲学家们常常这样进行，可我认为这太糟了——在这样的宣讲进行当中听众很难始终醒着，更难从听报告中知道点什么。我听过这样宣读的数学论文，不过很少听到；每回报告都是一场灾难。有回报告是一位哲学家作的，谈一个边缘题目——可以叫做命题逻辑（哲学）或叫布尔代数（数学）。他读每一个词，每一个字母，每一个p和q，每一个命题联结词。多蒙他好意略去计算性较强的证明，但是听众中一有人提出问题，他便略带不悦的口吻说，"我可以把证明读给你听嘛！"

那个学年春，我写了一篇关于价值论的论文。它不是由于听哪门课程——它是发自内心。这篇论文是打算清除胸中对哲学的焦虑，以公正态度面对这种焦虑。实际上我是问哲学是否有什么价值。现在我多半会为那篇论文而感到惭愧，可是我还是喜欢看它。当时我拿它给我哲学界的一些朋友看，也包括哥特夏克。他们不喜欢它，我在日记中写下："我有一切理由猜中，哲学系决不会授予我博士学位。"

五月初，美国哲学协会在圣路易开会，我不花钱搭便车跟格兰·摩若和他娇媚的妻子维克（Vic）一同前往。太好了。我遇见一些重要人物，有许多演讲我很喜欢，我还喜欢同格兰和维克建立私人联系。"他们是大红大紫的人"，我的日记这样写着。

情况如此，浮沉顺逆，直到将近5月末大难临头。这大难

是硕士学位的综合口试。当然我知道情况不妙。问我的问题不只是关于哲学本身（这个我认为我懂），也是关于这一学科的历史（这我向来总是很不行）。我不及格，我失败了，我出局了。

格兰·摩若告诉我这坏消息；我们在他的办公室，站着；偶尔我前后踱几步，走到窗前向外望，然后又回来非常仔细地察看书橱里一些装订成册的期刊的书脊。我竭力不让我的眼睛流出失望、挫折、恼怒和苦痛的泪水，但是我没做到。摩若竭力要显得说话通情达理，我很讨厌他。“算了，哈尔莫斯，毕竟你也知道，除学术领域外，还有很多条路人可以努力去走。

12年后，1947年我取得古根海姆研究员资格；两三年后格兰·摩若也取得；我不禁感觉优胜、自满，为“打败”他而沾沾自喜。我一直不时想知道他的地址，跟他建立联系，但是从未如愿。

矩阵

甚至哲学上的失败也没打断我阔步前进的步伐。我根本没烧毁我的数学桥梁，从哲学研究生正式转为数学研究生也容易。这场大祸后不到一个月，暑期班就开始了，我以“高等代数导论”（布拉哈纳）、“高等分析导论”（斯坦姆莱）和“数论”（卡迈克尔）全力奋进。代数和数论占据了我的大部分注意力。我确信我要像布拉哈纳，做代数学家，布拉哈纳也暂定收我作博士生。代数课很难，我发疯似地用功；数论是个欢乐的新天地，我热心地在它上面下功夫。

我说发疯似地，意思就是发疯似地。布拉哈纳不知如何才明白，课本是鲍谢尔（Bôcher）作的那本书（我认为写得一团糟），在我花在这个科目上的大量时间当中，我的主要情绪是恼

火达到愤怒。既然在我以后的专业生活中，绝大部分时间是花在线性代数及其推广上（这部分数学和其他任何部分相比，我更为喜欢，也懂得更多），那种愤怒现在看来可能显得很怪。我倒不以为怪。有句老套话说爱和憎相去不远，这也许是部分解释。另一种可能是我本能地为这一科目所吸引，但那种不必要的困惑使我不能达到问题的中心，所以我心烦。

向量空间不在鲍谢尔时代的普通数学词汇之内，线性变换刚刚一提，在他的书中不占重要地位。正交矩阵在最后一章中粗率地定义为（$P'^{1}=P^{-1}$），根本不暗示它的几何意义。相似性的经典必要充分条件（不变因子及其他一切）要依赖于“λ-矩阵理论”——λ-矩阵即其元素为一元多项式的矩阵。我把对λ-矩阵有困难的人（包括我）组织成一个残余班；在该班的一次集会后，我在日记中洋洋得意地写下：“我会教课”。布拉哈纳的课程有些是根据狄克森（Dickson）的《近世代数理论》，这本书写得不好但编排紧凑，书中各种典范型得到应有的强调。鲍谢尔、狄克森、残余班，还有从大卫·内茨沃格（David Netzorg）（后面我要谈他）得到的一些灵感，我总算通过了我的线性代数这一关。四五年后，在我已得到博士学位，听过冯·诺伊曼谈算子理论之后，我才真正开始懂得这个科目是讲什么的。

院　长

鲍勃·斯罗尔（Bob Thrall）当时是伊利诺伊的研究生，搞的仍是纯数学。后来他成了应用数学的积极倡导者，但那时他是布拉哈纳的一名博士生。这是我们的共同点，还有我们对卡迈克尔（Carmichael）的课程都有兴趣，我们都爱下棋；除此之

外，在几乎一切事情上我们都有分歧。鲍勃相貌堂堂——19岁上就是少白头，他总打领带，他滴酒不沾，政治上保守，是经常进教堂的美以美会基督徒。我是留长发（在那个时代），不注重领带，酒喝得很厉害，政治上开始越来越偏左，也从不进教堂。我们常在一起，作代数和数论，下棋。他胜我是常事。我们在卡迈克尔的群论书上也做了工作；我们一字不落地至少校读了三遍（长条校样，版面校样，终校）。没报酬，兴趣活儿。

R·D·卡迈克尔是伊利诺伊大学数学系的一位出色成员。有一次他跟我说，有一个时期几年当中世界上仅有三个数学家一年发表100页以上的论文：G·D·伯克霍夫（Birkhoff）、N·E·诺伦德（Nörlund）和他。他的讲义编得好到极点，他讲得清楚，发人深思。我最初是由他那里知道 $2^{2^5}+1\equiv 0 \bmod 641$ 的，当时我急忙赶回家，记在日记里。他写了好几种书，不断发表很多东西（主要是微分方程）。我佩服他，想尽量在许多方面做到像他。例如，他手写的p独具特色（垂直一划上边高于小圈的部分和下边低于小圈的部分几乎一样长），我采纳了这种写法。到今天我写的p模样还很怪。

我在卡迈克尔的课程当中爱上数论。他叫我们作一个表，最上排列出的主题是前400个正整数，最左行列出主题大约25项，如因子分解、平方数和、素数和等。他指示我们填这个表，进而猜测（如可能就证明）尽可能多的定理。

我的第一项研究是受了卡迈克尔的启发。他给我们讲了一个特别问题（或许是由四平方数定理想起的）：对于哪些正整数 a，b，c，d，每一个正整数以 $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ 的形式可表示？（"可表示"的意思是通过 x，y，z，t 等变量的整数值。）答案是恰有54个这种形式，拉玛努衍（Ramanujan）把这些形式已全部确定。我的问题是：哪些这种形式表示每一个正整数恰有

一个例外?我找到88种可能对的形式,证明不会再有别的形式,并证明其中86种实际管用(例如,$x^2+y^2+2z^2+29t^2$ 只不能表示14。)我不能决定的两种形式后来哥登·普尔(Gordon Pall)解决了:$x^2+2y^2+7z^2+11t^2$ 和 $x^2+2y^2+zy^2+7z+13t^2$ 只不能表示5。作这个题目,我第一次发表的研究结果,不需要任何灵感,只需要耐心和勤奋,多应用卡迈克尔教我的那些技术,但这项工作给了我一种成就感和自信以及我可以作研究的(极需要的)信心。我非常得意。我买了200份抽印本。结果好多年后我才找够那么多人,送他们抽印本。

卡迈克尔是我那个年代研究生院的院长。数学系通常称他为院长。他喜欢我,他爱谈话。我常按约定去他的研究生院办公室,带着一份准备好的问题清单——但是院长需要的只是一个问题。关于那一个问题和一些有关的、无关的话题,他真可以给我讲上一个半小时的课(决不夸张),讲话终了,在外面等着见他的其余下午有约的人手挽手站起来,我只好匆忙离开。他跟我说他的研究生时代,他在普林斯顿的生活,他的六口之家,他写的诗,他正在写的和即将写的论文。他抱怨院长工作占去他的时间——自从他接手工作,每周从来找不到20小时以上来作研究。

我参加哲学考试两三个月后,一天我接到研究生院办公室的正式通知:院长想要见我。他告诉我是什么事,态度几乎显得为难。原来是他敦促我拿一个硕士学位。哲学学位我不合格,但是要论我的统计课程和暑期班的知识,拿数学学位我是绰绰有余。事出意外,可是我很愉快:它对我生活的影响也就是我得交10美元证书费而已。到后来我才猜想到院长那么急切是为什么理由。我的计划是力争博士学位——中间学位是不值钱的点缀。但是从校方的观点看来,我是个成绩单上有一科不及格,

别的科 B 又太多的学生。我把成绩提到博士学位水平的机会，在研究生院秘书、举足轻重的弗格特（Voigt）小姐看来比我看更渺茫——我猜想是她建议院长劝我图一个通常的安慰奖。我以天真的眼光把这计划看成是在背上轻拍一下，于是我的朋友们和我庆祝这额外学位。

第一堂课

假使你是数学系主任，你会给我这样成绩的人一个研究员或助教或至少讲课学者的职位吗？柯伯尔（Coble）没给。他本来该给吗？当时我愤怒，感觉受到歧视；我知道我比大多数研究员和助教强。现在我可以明白科伯尔的论点了：成绩看来不够好。我读研究生院一直是个付钱的主顾，只有一学期例外，那时候我出了紧急情况，所以给我一班让我教。

阿瑟·拜伦·柯伯尔（Arthur Byron Coble）在那年代是个大人物：一位代数几何学家，一本列入“美国数学会讨论会丛书”的书的作者，国家科学院院士，对美国数学状况有影响的重要人物，曾任伊利诺伊大学数学系主任多年。他的年薪为10 000美元——在那个没有通货膨胀的萧条年代，对大多数人来说这个数字代表超出贪婪梦想之外的财富。在1933年，国内信件的邮资是2分钱；在1935年，600美元可以买一辆新福特轿车；在1938年，新获得博士学位的讲师，标准年薪为1800美元。粗略地说，50年间通胀因数为10，柯伯尔的薪金相当于1983年的10万美元。

我只是以柯伯尔的行政人员身份认识柯伯尔；我从未听过他的课程，甚至单独的演讲。有个关于他做博士导师的故事，也许是稗官野史，但其精神是真实的。据称，他有无限一串博士

论文题目。你证了2维的一个定理后，他叫下一个博士生把结果推广到3，叫他后面的博士生推广到4。这故事讲杰拉尔德·赫夫（Gerald Huff）让他扫兴：他不但解决了5的情形，而且也解决了每个更大的维数，这样就叫无限个未来的博士全歇业了。

1935年9月伊利诺伊将要开始上课前的一天，我得知这一回有一份工作等着我——给我一班大一代数让我教，早晨8点（明早开始），每周5天，只教一学期。报酬是每月45美元——我认为这太好了，是一大帮助。我住一套旧式舒适的5居室大单元房，离校园不过5分钟的步行路程，租金每月45美元。

我不怕教课。怯场，是有的；害怕，倒不怕。怯场就是心情激动，略有紧张，精神暂时能集中；按这个意义说，每上新课，我总是怯场6分钟：人刚到齐前5分钟，开始讲课后1分钟。讨论会发言和其他各种公开露面也一样。把这种现象叫"怯场"，也许是个错名称——它可能就是一种下意识的自动加快转速，给人以克服每个开端的巨大惰性必需的动力。

尽管关于教书我仍有许多东西要学，但我知道我对付得了，也对付下来了。初教书的人说他们根本还不知道怎么教法，我总是感到意外。他们不是在教师的影响下已经过了几乎20年吗？他们不是注意到了有的技术似乎很有效，有的技术就是让人厌烦吗？他们不是曾喃喃自语过："我可以把那一大套讲得好点吗？我碰上的坏教师够多了；我知道，我以为我知道，不需要做什么。于是我满怀信心，大踏步昂首走去教我的第一堂课，在我急切要处理好这堂课的热情下怯场几乎不见了。

我处理得真够好。我8点教课，每周3天，上午时间满满的：9点、10点、11点我有课，我修的研究生课程。我认真看待这工作；我的许多则日记都是说我教的课。"关于因式分解的

错误……，关于对数的测验……，责备全班，结果引起无数次讨论……，得到大家喝采，（我不记得为什么喝采，但是我高兴）……教行列式……，求出最后结果。”

我的学生年龄都在 17 和 18 左右；我是个聪慧而有经验的研究生，年方 19。他们相信我给他们讲的东西。他们有的很好，有的不可救药。唯有一个人的名字我永远不会忘记［姑且叫他德罗辛（Drossin）吧］，这位是不可救药当中的不可救药的。上课无规律，缺家庭作业或作得不行。期中考试成绩“D 减”左右，最后大考也许能帮他达到课程及格，但是我没有多大信心，他也没有。大考前的星期六晚上，我家有一个小小的晚会，忽被门铃声打断，那是德罗辛。他说可以跟我私下稍谈一下吗？我感到有点意外，领他到一个空房间，问他有什么事。我是研究生，是不是？或许我不太富裕，是吧？可这门课对他很重要，所以要是我能帮他及格，他很感谢——他也不叫我白帮忙——他给我 5 美元（半周的房租，一周的食物。）我太惊讶了，没有发怒，可是我叫他走开。我回到晚会上，告诉他们我知道了我这人值多少。下星期一，德罗辛的卷子是我判分的头一份。他不及格，准确无误。

黑兹利特和内茨沃格

1935—1936 那一学年，特别是上学期，我修的课程完全是典型的伊利诺伊研究生教学大纲的课程；我跟着书走跟着大纲走。我修代数、分析和几何——别的还有什么？

代数是奥莉芙·黑兹利特（Olive Hazlett）教的，照我们的看法，黑兹利特是一位著名的重要数学家：她发表论文，她教高等课程。我记得系里还有三位别的女性，这在今天也许出人

意料，但在当时却十分自然。数学系教职员中没有黑人。(在一个初级班里出现了一个优秀的黑人大一学生，他很快被人发现，受到鼓励，允许他按自己的进度学下去。他就是大卫·布莱克韦尔 (David Blackwell)，后来成为或许是现存最优秀的黑人数学家。)

黑兹利特的课程主要是根据范·德·瓦尔登第一卷，当然要有些增删。她高兴跟我们谈她的一篇论文，她给这篇论文定的标题是“将环嵌入域”，她也高兴跟我们说她的同事萧教授如何就这个标题来同她逗乐儿——他说，这在人心中唤起一幅极坏的农业活动的图景。

尽管她在数学界有不平凡的地位，黑兹利特教授至少有一个局限是我一直没有忘却的，那就是她对数学及其分支，尤其是她的那一分支——代数，抱有狭隘的看法。当她在课程中接触到形式幂级数起重要作用的那部分代数时，她指点给我们看它起什么作用。大卫·内茨沃格 (David Netzorg) 是一名才华横溢的学生，他和我同班上课。他受的训练和才能远在我之上，但是他以前从未见过这个定理，于是他提出疑难、反对意见。他说，你不谈收敛就不能谈无穷级数。他错了，人能谈也应当谈，但是黑兹利特却不这样回答。她的回答语调严厉 (正如大卫的问题有一种抱怨挑战的语调。) 她说不行，不行，代数中你不可谈、你不能谈收敛这种事。她重说她最爱说的一个说法，“方法的纯洁”，她似乎认为大卫很不好，存心玷污她的代数。大卫不懂她的回答，对她的观点不抱同情。等下一班学生开始来到，用胳膊肘把我们赶出去时，讨论才告结束，而问题并没有解决。

现在，将近50年后我理解这场争论。大卫错了，形式幂级数离开分析也很讲得通，但是他知道或觉察到显然黑兹利特教授不知道的事情。他知道结构的混合体常常能使现代数学内容

更丰富，胜过“方法的纯洁”。拓扑代数学、代数几何学、几何测度论都是重要的混合体——离了这样的科目，现代数学就不会存在。内茨沃格错了，但是黑兹利特错得更厉害。要纠正他，必须补上-·个缺少的定义；要纠正她，就必须抛弃情绪上的一个偏见。

我知道许多数学家，既聪明又思想混乱，就像大卫·内茨沃格那样，但是我非常喜欢他。我最初不喜欢他，因为他似乎太不爱交际。其实，他性情羞怯，偶尔脾气不好，那只是内心窘迫。我想他也势利眼，不愿意跟我联系，因为我不如他的数学好。但是我错看了他。他讲解问题讲不清楚，但是他知道的多，也爱讲解他的所知。一点一滴，我跟他学会的东西越来越多，他因此喜欢我，我也喜欢他。在数学上他照顾我，而我在一些与学生生活有关的事情上照顾他，例如准时交上研究员资格申请，把他的论文如数交给研究生院。

我记得我曾向他诉苦说我理解矩阵的有理典范型有困难，我记得他的解释的精神。他可能把他的符号和他的语言混淆了，但是他知道内在的思想，这正是他要传达的。他说，这是总要发生的事，这是典型的线性现象。给定一个线性变换，你就选择一个向量开始作为基，对它不断作这种变换。当你停止得到新东西时你就停止，于是你就得到一个典型的友矩阵。那时我不懂他的意思，现在我懂了，这是见识，是值得懂的。

我们成为亲密的朋友。他经常晚上待在我的房间里，看我的杂志，偶尔也开冰箱取东西吃。我常先发困，上床睡觉；大卫熬下去。早晨，他或是还在阅读，或是在起居室睡椅上睡着；无论是哪种情况，他总要吃些早点，然后回家。

有一次我偶然偷听到大卫·内茨沃格和特德·马丁（Ted Martin）的谈话。大卫刚把我介绍给特德，然后我们就分手了

——大卫和马丁往前走，我和别人在后面几步。特德头转向我，问：他行不行？大卫说马马虎虎，但他是个苦干家——然后他偶然半向后扫一眼，似乎知道了我也许听见他的话，看样子很不好意思。

我不大介意。至少我现在认为，虽然我反对让人那样品评我，但我只是稍稍反对。大卫有高标准，我就不安全了；我决不期望他会说我就是很不错。当然我希望我“行”，或许在下意识里我认为我行，但是我并不真的相信我行。无论如何，到此为止——我根本没告诉大卫我旁听到他的话。

大卫在第二次世界大战就要爆发前回到菲律宾（他的父母住在菲律宾），日本人来时他正在那里；他遭拘留，后来死了。

早安，分析

我于1936年4月成为数学家。或者是3月吗？我有那种大家熟悉的“话几乎就在舌尖上”的感觉——我几乎可以说是4月（或3月）的哪一天。那天之前我是学生，有时相当行，有时不那么行。符号没把我弄胡涂，我可以把符号耍得十分好，而且我懂代数的干净、有限的推理。（我仍然感觉仿佛我是天生的代数学家，只是环境的偶发事件才阻止我成为有充分资格的代数学家。）我不懂（甚至没有梦想到）“结构”概念，后来布尔巴基（Bourbaki）使用“结构”一词时所指的那种意义上的“结构”观念，而且我也让ε—分析的无穷小的微妙给难倒。我可以读分析证明，如果我努一把力也能记住那些证明，可以再写出来，但是我并不真正知道那是怎么回事。

前一年，当斯坦姆莱把我介绍给“高等分析”时，悲哀的日记条目数量大大超过欢快的条目。通常是“斯坦姆莱的分析

叫我发愁"，"分析又把我弄垮了"，"分析失控了"：难得有什么"作了一些傅立叶级数题——作对了！"和"分析是A，40题作对39题"。

我开始读研究生院时情况没有立刻改善。皮尔斯·凯楚姆(Pierce Ketchum)要教我点分析，但是我就是不理解。凯楚姆若说，我们来看一个定义在单位圆中的函数，班上一个爱炫耀的聪明学生特德·王就问，"开的还是闭的？"我看不出这问题有什么意义，我看不出它有什么关系，或者有谁介意，我为他的插话感到恼火。另一回，凯楚姆给我指定一个题目要我阅读有关资料，再对全班作报告——这题目有关一致收敛。他指示我要读什么——哈代(Hardy)的《纯数学》中某些页和蒂奇玛士(Titchmarsh)的《函数论》中某些页。我记熟(!)报告，我简直不大懂报告内容的前后关联，必须由哈代部分变为蒂奇玛士部分时，我很轻率地把哈代的符号变为蒂奇玛士的符号。至于我，我谈的不是一个概念，而是两组书页上的符号。我不喜欢分析。

天色破晓时——我记得那环境和场面——安布洛斯和我在数学大楼二层的一间讨论室内谈话，他说的一些话可算得我这只瞎骆驼需要的最后烛光。我突然懂了 ε（埃普西伦）和极限，十分清楚，十分美，十分令人兴奋。我欢欣鼓舞，花一小时把"葛·斯·朗三氏"翻了一遍，忍不住快活地点头。对，对，肯定，我能证明这个！——是的，这很明显——他们怎么会把这个胡乱弄得那么糟？我感觉一切都顺利合式了。我还有一切一切都要学，但什么事也不会阻止我去学。我就知道我可以学。我已成为数学家。



安布洛斯，1948 年

为什么学几何？

30 年代伊利诺伊的研究生数学大纲的设计者似乎没有疑问，他们确切知道每一个数学家都要知道的是什么。矩阵和交换群和伽罗瓦理论在内；豪斯多夫空间和同伦论在外。（“在外的理论”有时候倒有。我在最后一年，在修改我的论文的同时，利用机会选修一门一般拓扑学的初级课程。）一致收敛和柯西定理在内；巴拿赫空间、希尔伯特空间和概率论在外。（不过，说句公道话，我们要记住：巴拿赫的书和斯通的书是 1932 年出版

的，科尔莫戈罗夫的书是1933年出版的。）大纲最奇妙的地方是19世纪意大利的代数几何在内；要获得伊利诺伊的数学博士学位，你得知道三次曲面上27条线的一切性质。

我从阿诺德·恩姆奇（Arnold Emch）修习几何课程。他是一个体形圆圆的小瑞士人，一部白山羊胡子，带着浓重的德国口音。精神上，他肯定属于意大利学派。据有些评论家的说法，在该派发展的代数几何中，定理的反例被看成对定理的漂亮的补充，唯有数学的这一部分如此。恩姆奇提到所有应该提的名字［如克莱勃士（Clebsch）和塞维利（Severi）］，教我们怎样数一切事物；这个科目有时候叫计数几何。有一段时间，我认为它很好玩（“塞维利读来很有意思”，我的日记这样说）。我们数二重点和尖点相交点和重数；这要使用组合技巧：首先你拿两个整数相乘，但这并不是答案，因为有些组份在积中出现两次，所以你得减去那些组份，但是这样做的明显方法减去一些组份一次以上，所以你又得把那些组再加进去——（我们）很难知道我们何时作完，何时我们可以停止。我们都怕提问，可菲立克斯·维尔奇（Felix Welch）真的提问（你怎么知道什么时候停止呢），恩姆奇就翻了。恩姆奇给我们讲了泛点，但是他按非正式的用法使用这个词，却要求我们理解它的含义。等他知道了我们不理解，这时他就要开始上下一堂课；他告诉我们：“泛”并没有什么特别含义。

我们的曲线和面是实的——必定是实的，因为我们要画图（有些图是由一个以上组份组成），但是图是复的，因为多项式方程总有解。总之，没有提过“域”和“理想”之类的词；我们可以看出的可能把这个学科作成严格学科的唯一方法，是玩弄分析中的埃普西伦，但是并不真的知道如何做。

我正和班中其他学生一样迷惑不解，但是也和其中几个一

样，把这门学科当游戏看待——你得先理解，然后按照你猜测的规则去玩。我们当中有些人玩得相当好了。安布洛斯玩不好——他坚决要知道那些句子指什么意思。一次重要考试之前两三周，他放弃了希望，求我帮他一把。我们一起温课，我把所知的一切都告诉了他。到考试的时候，我看懂所有的试题（我以为），我把答案写出来。安布洛斯看不懂试题（他后来承认）；他就把跟我学到的一切都写出来。我得个B，他得个A。

第四章　学习做研究

杜布来到

那是重大的一年——1935 年秋季开始的那一学年。那年是个分水岭，而使它成为这样的一年，最值得记念的事件是乔·杜布（Joe Doob）的来到。

安布洛斯和我是玩腻了的老研究生；我们知道系里每件事，我们认识每个人，可以委托我们处理 9 月初某一天下午可能发生的任何事——系秘书让我们负责看守主办公室。这个小伙子进来，样子像个新研究生，平头，衬衣袖子及其他。他当时 25 岁，我后来才知道的，但是看上去只有 19 或 20。我们问，你有什么事？柯伯尔在吗？他问；我姓 Doob（杜布），D，O，O，B。安布洛斯和我听说过这位很有才华的年轻的大人物，他是以哥伦比亚大学研究员的身份来伊利诺伊的；我们猛然离开桌子，告诉他我们是什么人。过不久我们的生活就交织在一起了。杜布来到几天后，我的日记开始出现这样的条目："和杜布一块儿吹牛"，"跟杜布玩十三盘（!）斯夸士，7：6 他胜"，"杜布的课很棒"。（我没在他班上——我没准备好——但是我不时进去旁听。）在我们最初玩的一盘斯夸士中，杜布一失误气得直骂街。

他说："就叫我乔吧"。我们谈数学，不排除政治、音乐、职业上的闲话和许多别的生活事物，但是数学差不多比别的什么事都谈得多。平面上有没有一个集合，使得……？，……如果导数本身不可微，是否仍然可以下结论说……？

那个时代伊利诺伊的数学课程很马虎，而且不完全跟上时代。大概并不比多数其他大学差，例外（如芝加哥、哈佛和普林斯顿）一定很少。杜布是系里第一位知识丰富的现代数学家；马丁和拜尔（Baer）随之还有许多别的人，也开始来了。虽然在我的专业生活中，思考的是遍历理论、拓扑群、数理逻辑和泛函分析，这些在30年代还是热门新闻的科目，在1938年我得博士学位以前我几乎没接触过任何一门的任何部分，确实从来没念过任何一门这种课程。我们研究生有几个人组织一个以巴拿赫的书为基础的短期讨论班，除此之外，所讲的都是不接近研究前沿的常规课程材料。杜布不是宣教士，他不着手设计一套新课，引起一场革命，而是仅凭他是杜布，开始在系里注入一种新精神。

他要面对的研究生，有我曾说过的代数、分析和几何等课程。第二年和第三年的研究生课程讲的边缘科目如同调代数、微分拓扑和泛函分析，后来成为十分普通的东西，当时却没有人懂得；唯一和这些科目稍微类似的一门稀有课程是讲椭圆函数的课，卡迈克尔开过一次。在我的最后一年，杜布来点新东西，他开了前面我提过的拓扑学。它主要是依据集论拓扑学，但是也包括一些同伦和二维紧流形的分类。杜勃在到伊利诺伊后的多年当中，虽然他指导了几篇关于随机过程的博士论文，却从未得到机会教一门关于他的专长的研究课程；他的学生们靠自己阅读原始文献才知道它的背景。我不是要说这样做不好——也许比先有预备知识还强——但是现今它肯定会让许多研究生

和许多未来的受尊敬的研究课程的教师惊骇不已。

附带一提，虽然我佩服杜布，认为他了不起，我却认为他讲得不好。他太轻率。他似乎十分担心显得妄自尊大，以致他贬低一切——什么都不重要，什么都不难，没有一件事值得花很多时间（足够时间?）。在个人谈话中，他的见识占上风——但甚至这时你也必须注意他的面容如何，声音如何，而不是只听他说的话。他显得机灵而感兴趣，听起来他高兴而激动——但是他说的却是什么“这个实在是相当琐细，你要做的只是……”。他给难住时最好，你可以注视他奋力克服困难前进——那时他就会是坚定而认真的。

他具有教师唯一绝对必要的品质：他可以看出学习者所见不到的是什么。正是他的轻率和简洁，可以成为他的伟大见识的来源。我记得有一回他对我就说了两句中肯话。我一直尽力想弄懂可求长曲线，而我查阅的书根本没提到至关重要的这两句话。(回想起来，我感到诧异和怀疑——大概提过，但是我看漏了。)无论如何，我是让满篇的和、绝对值、不等式和上限给弄迷糊了，我是让绝对连续性和有界变差的差异和相似给弄迷糊了。在我们一群人的一次谈话当中，又出现了可求长曲线，那时我必是神色茫然不安。乔一定觉察到了。他转向我说：“有长度”。这就行了。于是我的阅读得以正常进行。

全是工作和政治

我给研究生提出的建议不总是我做研究生时我自己的做法。例如，我建议他们决不要留在自己读本科的原大学的研究生院中。留在原校是个坏主意：你学的不够，你遇见的人不够，你的观点太狭隘了。从伊利诺伊转到密歇根，甚至从普林斯顿



J·L·杜布，1967年

转到伊利诺伊，从洛杉矶转到芝加哥，都使你接触到新见解。这样可能教会你学会你从未见过的数学，而且肯定让你看到你不知道的新方法和新处理法。新地的教师们，以及他们的同行朋友，扩大并丰富你的科学联系的来源。甚至实际事务也很重要；我们都应当知道，关于组织课程、讨论班、图书馆和一般的系科管理，有不止一条的道路可走。这是几乎人人共有的长者智慧；当我是未来的低级数学家时，我没注意这一点，但是现在我悔不当初。

现在我提出的建议，还有一点要是我当初能遵守就好了。它和“全是工作没有游戏”这句老谚语有关。这句话我不相信。我认为“全是工作没有游戏”是做成任何事的唯一方法。我以我可能想到的惊人方式提出了我的论点之后，我准备再把它收回

加以修正。我不是在谈一辈子的苦刑和奴役，我也不是要排除能使人身心放松的网球赛、侦探小说，同一帮朋友在中国城会餐，或星期六晚间电影。我说的是学者的工作并不是没有消遣就会变成忍受不了的苦刑，而且对我们大多数人来说，两种消耗性的热情就可说是多了一种。

我们数学家很幸运，我们同许多艺术家及手艺人共享我们的好运：我们做自己爱好做的事而得到报酬。有一首老劳动号子唱道："我们去上班，挣现钱，买吃的，长力气，去上班，挣现钱……"；我们可不是处在它描绘的这种状态。饭馆的收款员一天工作下来筋疲力尽，他满腹憎恨，他也许为乐趣或为改善生活而上夜校学习法律，或者他也许每晚去玩滚木球戏，他需要有一种业余癖好。我们不需要业余癖好。我也许甚至说我们不应当有什么业余癖好。我们平常人大多没有足够精力分两半给两种热情；我们不能数学和大提琴两样都行，我们不能在数学上和细木工艺上都有创造性，我们不能在数学和政治两方面都有偏爱。只抱有一种热情，把自己的全部精力灌注到一种主要活动中，对一个处于发展阶段的专业人员来说尤其重要。一个数学研究生除作数学研究生外没有——不应当有——时间去做任何事。

我违反了这条规则。我违反它，不是由于旁听一门音乐欣赏课程，不是由于看关于哲学的古怪的书（一生的不认真的爱好），不是由于招来一群化学系学生打扑克——这些只是小消遣，就像网球赛、侦探小说和在中国城饭馆吃饭一样。我违反自己的规则是由于我曾暂时注意政治理想，这种活动是极耗费时间的。

我由一个爱国的匈牙利保皇派转变成一个30年代中期典型的积极左派。希特勒在德国势力日益壮大，而在美国惠伊·

朗（Huey Long）和考夫林（Caughlin）神父的追随者越来越多。社会主义者诺尔曼·托马斯（Norman Thomas）和雷恩·布鲁姆（Leon Blum），还有共产党人厄尔·布劳德（Earl Browder），甚至斯大林，比起他们看来都不坏。早在我左倾之前，乔·杜布就已左倾，我大部分是受了对乔·杜布的佩服的影响，我改变信仰，参加共产党。我出席集会，我收集请愿签名，为后来被称作共产主义阵线的各个组织募款。我甚至不记得都是哪些组织。我的日记常提到ALWF，这个容易认：它是“美国反对战争和法西斯主义联盟”。我属于所谓“青年委员会”，我似乎还是某一组织的“接待委员会”的成员和另一组织的“和平委员会”的成员。我散发宣传左翼演讲人的传单，我为西班牙共和派募款。我帮助组织一个合作社，其目的一部分是经营一家餐馆，黑人和白人同样欢迎。

甚至我的社会生活也受到影响。影响大部分来自数学，但是有一段时间大部分来自校园别的地方。乔·杜布组织了星期五晚间讨论组。劝一人“志愿”熟读有社会意义的东西，对来的十来个人谈话。话题包括最高法院、人寿保险、辩证唯物论、墨西哥、出版自由、像一时出名的英国自称为法西斯主义者的奥斯瓦尔德·莫斯莱（Oswald Mosley）那种明显的恶棍。谈话后我们喝咖啡，吃小甜饼，然后就当天的话题进行深入的讨论。讨论主题可能随时改变，谈最新的离婚案丑闻或数学。安布洛斯有时候来，当然我们乐于辩论的主题也包括政治。我记得他原来同我一样保守，甚至更保守，我的日记曾以惊喜口吻记下我拉他参加ALWF的日子。从那时以来，作为急进主义者的他的态度很保守（我的意思是说一贯、坚定、忠诚、不移）。我怀着幻灭、厌恶、不耐烦的心情老早放弃了急进主义，而他对以往40年当中世界面临的社会问题，却对右的（意为左的）一面

保持忠诚，在这方面常常很积极。

在我跟政治度密月期间，我做的一切事（当然数学除外）都受到影响。例如，我阅读的东西从约翰·里德（John Reed）的《震撼世界的十天》和安娜·路易斯·斯特朗（Anna Louise Strong）的《我改变世界》跳到亚历山大·伍尔科特（Alexander Woolcutt）和P·G·沃德豪斯（Wodehouse），然后再回到“新群众”和厄普顿·辛克莱写的小说。我开始学俄语，作着移居到那个牛奶和蜜糖国度的白日梦。

这大都是1935—1936年的事。1936年后期，我开始认识到一天没有那么多时间又作数学又搞政治。我辞去各委员会的职务，削减出席会议的时间。我的见解仍带着浓重的党派路线意识形态的色彩，我会作这样短评：“柏拉图这家伙是下流的反动分子——法西斯分子”。一年左右后，疲惫、腻烦、不耐烦和消耗一切的作数学的渴望，开始改变我的看法。我的日记开始说这样的话：“费力的ALWF的会，一切错事照常——我可不想去了”，“让人受不了的晚会——我想离开了”，“这学年以后我不再干了”。和那时期许多别的急进的知识分子一样，急进思想随着1939年纳粹和苏联签订互不侵犯条约而突然终止。当然，我感到意外和惊骇——情绪也有些缓和下来。我告诉朋友们我就要“政治自杀”了，我真做到了。我决心什么也不支持，什么请愿书也不签名，再不为任何社会事业贡献力量。我一向过于羞怯，做不了搜罗信徒的传教士——这种事似乎有伤尊严，像强行推销专利药品，或从另一个角度看，像可耻的乞讨——要戒除使别人转而相信我的见解，这种决心不难保持。

我的见解是什么？在集中在数学上的讨论中，这问题可说是不切题，但是既然说到这里，我不妨先回答它，然后再谈主要情节。我惯于做所谓“陈腐的自由主义者”。在经济上我是保

守的，但是我赞成在工业中实行负责任的集体讨价还价。我反对大学科系的联合——我相信这将趋向不注意学术标准，从而降低学术标准，真是可悲可叹。我赞成完全公平对待黑人及其他少数民族，我把妇女看成我的俱乐部——人类的成员。我们大家，包括西班牙人、白人或匈牙利犹太人，应当有同样机会过安全、舒适和有尊严的生活。不过，我反对所谓的肯定行动。让一个不合格的西班牙人、白人或匈牙利犹太人当参议员或教授，只因为寻求人选的时候，没有足够的合格人选在“国会山”或“大学村”里有和他们那部分人口统计数字成比例的代表——我认为这就是人类在追求精神完美和思想完美上后退了一步。

我在1932年、1936年、1940年和1944年是罗斯福领导下的民主党党员——现在仍旧是民主党员。罗斯福这个人有缺陷(有没缺陷的人吗)，但是罗斯福这位领袖指出了达到正确目标的道路。我并不真的认为选举一位共和党总统是有罪——但是我从未选举过。跟我打扑克的律师和汽车推销员们认为我是热情的急进派，而我的年轻同事们则知道我是个不容置疑的反动分子。

再　生

即使我终于掌握了埃普西伦之后，我也没有立刻就开始喜欢分析。我根本不喜欢它。杜布的影响，作用十分缓慢。回忆起来，我可以看出我在线性代数中遇到的同样情况：我不理解，因此(a)我不喜欢它，(b)我必须努力用功去学它。经过努力用功，我对它的理解比看来似乎容易的科目还好，因此我就更喜欢它了。

早在1935—1936学年，生活显得暗淡（“灰心丧气，假如我通不过又当怎样?”）我仍是一个彻头彻尾的亚阿贝尔群的倾慕者，和布拉哈纳作过多次长时间讨论。不过，随着岁月流逝，我越来越不断为分析而奋斗，偶尔也得到小的胜利。我12月开始读“威塔克—沃森”（Whittaker and Watson），1月读“德·拉·瓦雷·普散（de la Valleé Poussin），2月读汤森德（Townsend）的《实变函数》。上帝饶恕我！我写道：“‘汤森德’很好”，后来我认为它糟透了，既不严格也不清楚，但是当时我必是让它多么不像“威塔克一沃森”吸引住了。烦琐少得多，埃普西伦少得多——你如果把手轻轻一挥略去难点，数学也就容易了。我不断回头再看哈代的《纯数学》，我觉得它难读但严正——如果你保持你的理智，你很快就可以看到你不断有进步。

第二学期卡迈克尔开了一门椭圆函数课。他说我不能修，因为我还没学过复变函数论中的必需部分。我苦苦哀求，请他准许我同时也学复变函数。他勉强同意，我就没命地用功。我把克诺普（Knopp）的小书上下卷全部译成英文，这样来自学复变函数，结果椭圆函数我得了个A。我现在想，可怕的东西：幂级数间长长的恒等式。由此，在非常仔细地观察了足够多的系数后，你能看出有多少种方法把一预先给定的整数表成三个平方数之和。

6月我在日记中写下：“克诺普对周期函数的处理很漂亮”。两三星期后，又写道：“黎曼曲面是可怕的东西”。7月初，“函数论是了不起的玩意”；7月中，“我几乎下定决心主修分析”，到月底，“木已成舟：我是主修分析的学生”。当然，这并不表示我已作完什么事——正好相反。但工作有回报。“比最近哪一天都更热情忙碌的一天；早晨，朗贝尔（Lambert）级数；下午，

'卡拉特奥多里（Carathéodory）'"。八月："'哈恩（Hahn）'一天大多时候不离身；白搭。我仍感觉我正在慢慢地掌握这东西。"

我在分析上再生的同时，代数和数论依然深深留在我心中。有一本麦修森（Mathewson）写的讲群的书我尽力读，而著名的密勒（Miller）、布里希费尔特（Blichfeldt）和狄克森（Dickson）（书名是不是《线性群》？）却给我造成困难。密勒是多产的美国有限群论专家，年老、曲背、脆弱、武断，在数学上狭隘，在经济上越来越富。我在数学大楼里常见到他，他是来会他的股票经纪人的。他死时已是百万富翁，他把财富遗赠给伊利诺伊大学。

在数论方面，我尽力读"朗道"（Landau）。这就像沿山路往上走，坡度可能显得不太陡，但是半小时后你就会气喘嘘嘘。也是大约在这时候，我几乎作完前面提到的近乎包罗万象的工作。有些日记条目说到进步带来的激动。7月1日："艰苦登山。作出对于偶数情况的一个证明。奇数情况看来要难些。"两天后："今天早晨得出奇数！很古怪的证明！卡迈克尔自己也感到有趣"。

卡迈克尔那年夏天又教数论，但那时我的程度已很高，不必听他课了；我只是不时进去图个乐趣。听他讲课的主要是暑期班学生——学校教师们，他们每年夏天修一两门课，想最终取得硕士学位。他们很不行。我回想起一个细节。卡迈克尔提醒全班注意复数和笛卡尔平面上点的一一对应。一位有希望的硕士候选人举手。"我可以看见您对您的 a 和对您的 b 的作法，可是您能不能告诉我 i 跑哪儿了？"院长面容悲哀。

那年夏天最愉快的经验是我的初识集合论。我常坐在前门廊的摇椅上，喝冰茶，大读特读豪斯多夫的《集合论纲要》。我像一个小孩拿着一种新玩具：我认为它美丽又惊人。最初等的

概念猛然向我袭来，然而我对这些概念有充分准备，出现时我能领略其意义。我喜爱基数算术，我热切计算我能想到的每一个集合的元素数目。序数是另一种发现，而希奇的类型，非良序序数音乐：复杂但是很好。

别的力量，别的语言

在我的“转化”逐渐坚定的同时，个人的和职业上的其他影响也大大出现。

一个小影响，但是非零，是特里津斯基（Trjitzinsky）。我立刻就喜欢他了。“他十分人情味”，我的日记这样说。他有电影演员那种深色俊美和浓重的俄国口音；他和他那体态丰满的金发妻子瓦尔瓦拉（Varvara）（听人说这是俄国人对 Barbara 的读法）被一般人看成招人喜欢但有些古怪的中年孩子。有关他的最孩子般的事，就是他很爱开汽车。他和瓦尔瓦拉常去西海岸（我记得似乎是去看一个儿女）。他在他的大马力的哈德森车上放四只新轮胎，只要他能侥幸做到，就以每小时 85 英里的高速连开 20 小时，需要加油时才停下来。偶尔他把车开到路边去打个盹（瓦尔瓦拉不开车）。我想他说过他两天就开到洛杉矶。

在那个时代他是伊利诺伊的重要人物。他发表的论文很多，而且努力不懈地生产博士。他吸引了许多能力弱的学生，谣传他帮助你的方法实际就是代你写论文。他的一些比较好的学生多少年后向我抱怨——他们本想在他的指导下多努力用功，多学点东西。特里（显然是绰号，但人人都使用）学“硬分析”（微分方程、积分方程），但同时他深深迷恋超穷分类。[波莱尔（Borel）集合，拜尔（Baire）函数]的现代集合论概念。他的几篇论文和他的学生的几篇论文将古典分析和拜尔类混合一起

——无论是什么东西，先做成超穷序列，然后再掺入多重积分。特里认为他很行，但没有得到适当承认，因此愤愤不平。有一次舍瓦莱（Chevalley）被任命在美国数学会的理事会担任职务，特里咕哝“他做出过什么”，不明白为什么他没被任命。

别的影响？有，各种各样的数学。我四周都是，任何我当时没有努力学的部分，后来也喜欢了，其实当时我已经喜欢了。在几何中，我学了不变式，那是19世纪的、前希尔伯特意义的不变式，日记中写着“整天学习不变式——这玩意渐渐来劲了”。数论我读了欧拉给四平方数定理作的证明——读的是拉丁文，有许多词我不认识，但是从上下文我可以猜出不少，所以我和证明之间没有语言障碍。

语言继续是欢欣和收益的一个来源。英语是我最好的语言，远超过其他语言，各种用途都如此，特别是读数学文献。虽然我的匈牙利语说得相当好，西班牙语也还过得去，德语却说得很糟。但是就理解数学来说，我的德语仅次于英语，居第二位。[什么缘故？一部分原因可能是我在童年就接触德语，这样就使德语好像是一种“真实”语言，不像法语那样；另一部分原因可能是在我的学生时代大部分最好的书是德文书，如范·德·瓦尔登、塞弗特－特雷法尔（Seifert－Threlfall）和卡拉特奥多里（Carathéodory）等。有了高等中学的拉丁文知识和博士学位要求具备的法语知识，便可能读意大利语数学文字（容易）、葡萄牙语和罗马尼亚语数学文字（难）和世界语数学文字（价值不大），我以极不认真的态度通读一篇文章，甚至不想一想是用什么语言写的]。英语和德语合起来，便可能读荷兰语，但是许多地方需要猜测；有了这些语言，仍不能接近丹麦语、挪威语和瑞典语。

荷兰语很好玩。我不是说它奇怪或特别，我是说幽默。有

一次我问一个荷兰人，他是不是明白为什么他的语言会引得讲英语的人发笑，他说他明白。他说，荷兰语在那些人看来像是孩子话，正如同非洲语在他看来像是孩子话。我喜爱一页荷兰文给人带来的困难——它像是纵横填字谜语——我最后认出的许多同源词给我的那种乐趣，就像遇见一位久未见面的朋友，留起浓密的胡子，你认出他时都会感到的乐趣。

俄语不好玩——干脆就是难。我一直没学会俄语，但是我也曾有一两次参加一部分课程，看过两三本语法，也曾要下定决心每天大约读一页。对我最有用的技术来自翻译拉伊可夫的计划。我拿他的那篇 90 页的论文，“交换群上的调和分析”，靠一本词典着手翻译。我几乎是必须隔一个词查一个词，头一页我费了一个半小时。现在我能读俄文数学书刊——要靠词典帮助还读得很吃力，但我总算能读了。

还有别的什么影响？也许里伯尔（Lieber）丛书应当一提。这套书我非常喜欢，给我留下深刻印象。我不知道这套书有多少本，我仍旧有三本。这三本很薄（34 页，64 页，73 页）。扉页上印着“利连·R·里伯尔（Lillian R. Lieber）编写正文，休·格雷·里伯尔（Hugh Gray Lieber）绘图”（两位里伯尔：夫妻？同胞？）我手中的三本，内容为：非欧几里得几何、伽罗瓦理论和相对论。书的各页上印的好像是诗——各行长短不等，每行开头字母是大写字母——但是序言说明了这种情况。

这不是要作成
自由诗。
每句话单另写一行
以便于快速阅读
现今

人人都
行动匆促

这些话是漂亮的说明，是对米茨（T. C. Mits）（米茨即“著名的普通人”）讲的。读这些话，米茨先生需要在数学方面有很大耐心，超过他通常具有的耐心；但是中学里对数学抱有好奇心的孩子们肯定会欣赏这些话，而且会从这些话得到好处。

我埋头苦干，读书、用功、担心初试——那种永远悬在我的朋友们和我自己头顶上方的达谟克里斯之剑——我这样走下去，但是即使追想起来那好像是平常航行，当时看来并不是这样。日记一则：“半年内我能忘掉的数学的量似乎没有限度。”

初　试

博士资格的初试由四部分组成。其中三部分是笔试（分别考代数、分析和几何，一次考一门，三门间隔分开），第四部分是综合口试。口试也包括“小科”——通常是一门硬科学，但是我考的是哲学。

回想起来，我很喜欢这种办法。它为应试者和科系两方面提供充分信息，而有助于制定系统一贯的课程。有句老谚语说笔试告诉科系应试生知道什么，而口试则显出他不知道什么。至于系统一贯，那是和目前趋势正相反的做法，可取的做法。目前趋势是为每个学生提供适合个人的教育，而不是提供一大套大家共有的知识，人人都可指望别人也有的知识。--向有、现在仍有一套最低限度的基本数学知识，每个数学家都应具备。在目前的“数理科学”系中，很难找到一个科目所有学生都必修；期望的多，接受的少。计算机科学家为什么要懂微积分呢？——

有些人问。数值分析家为什么要学数论呢？统计学家为什么要有关于同调群的知识呢？这种实用态度造成的后果是思想混乱，在有的大学一个纯数学博士甚至可能对解析函数论一窍不通。

我为初试拼命用功，当然我也焦虑，但是我并不真的认为我会考不及格。三门笔试无非是一阵轻风吹过。我的日记说："参加分析笔试；当然，及格"。口试是一大乐趣。我记得，考试委员会由布拉哈纳、卡迈克尔、杜布、恩姆奇和麦克鲁尔（McClure）等人组成。（麦克鲁尔是人文科学院院长，代表哲学），我甚至还记得一些问题。杜布问2维流形分类定理的证明，我认为我回答了他的问题，但是看来他并不满意。后来他告诉我他尽力想从我那里得知直观的背景，他想听到我说的是"剪开和粘上"。卡迈克尔问我斯图姆（Sturm）是什么人，他有什么贡献；我胡乱回答。布拉哈纳叫我在黑板上写出（$\begin{matrix} a & b \\ -b & a \end{matrix}$），告诉我a和b是实数，问我全部这类矩阵构成的集合是什么。我感到轻松、友善、自信，我说："如果您叫我写的矩阵正确，全部这类矩阵的集合与全部复数的集合同构。"

想起我曾听说的一个故事，我爱再讲一讲。阿瑟·罗森塔尔（Arthur Rosenthal）在普度大学时，我跟他有些熟识。多年前他做学生的时候，他跟朗道（Landau）住一个房间。一天朗道回房里抱怨他刚才跟老头子戴德金（Dedekind）共度的一个冗长而腻烦的下午。戴德金开始说话失去控制，谈的都是陈年旧事——他恨恨抱怨在他的博士学位考试时，高斯净问他一些困难的、不公平的问题。

我的考试结束后，叫我退出室外，考试委员会进行评议。我在走廊里踱来踱去，深深地一口一口抽着烟。几分钟后他们一拥而出。恩姆奇可巧是头一个。他面带微笑跟我握手，说："祝

贺你！很好——就是哲学有点小问题”。这就是说，我通过了，其实杜布说我考得很好，但是最后通过还有一个条件：我再参加并通过一次哲学笔试。我抱怨这一点，但是别无办法。大约三个月后我参加了那次考试，消除了那个问题。

那一年是1936—1937年，我做真正修课学生的最后一年。我的课程不算艰苦：一学期微分方程（卡迈克尔）和两学期拓扑学（杜布），加上清算账目的手续，叫作“研究班和论文”，数学100，为了使学期学分数目合乎标准。下一年实在是我的最后一年，我只注册读第一学期。1938年春季学期当中，我写成论文，节省下费用。就是这些：就课程来说，我叙述我整个的数学教育。这种教育比起现下的教育来高下如何？

例　如

我既然“结束”了教育，就开始专心进行研究。初期压力已然过去，论文压力刚刚开始。在这中间相对平静的日子里，我有时间读《烟草路》，跟安布洛斯和迪克玩牌戏，输钱。我曾问乔·杜布他是不是愿意做我的论文导师，他说：“我想我们能给你找点东西作作”。他有一本廉价袖珍笔记本，里面草草记着一些可能作的研究问题，有十来道。他原来的想法是我把现代的力量强大的测度论方法应用于R·A·费舍尔（Fisher）所传播的统计思想。他已经以他在最大似然法方法方面的研究成果开始“整理费舍尔”，但是仍留下大量工作要做。第一步是我要尽可能多知道一些现代概率论和统计学。

到现在，我已做了60多年的学生，曾在各种各样的学校（从小学到博士学位）注册，共16所学校。我想我知道怎样做研究了。初试之后，我还不懂得，但是我开始摸索一个适合于

我的方法。如果我必须用一个词来叙述我的结论，那就是**例子**。对我来说，例子无比重要。我每学一个新概念（自由群或伪微分算子或仿紧空间），就要寻找一些例子——当然还有非例。只要可能，例子应包括典型例子和极端退化例子。不错，R 是个实向量空间，但是所有实系数多项式的集合，在开单位圆上定义的所有解析函数的集合，也都是实向量空间——O 维情况如何？有没有满足除 1x＝x 外定义的所有条件的例子？再比如说，单位区间上定义的，所有实值单调增函数的集合是实向量空间吗？所有单调函数——增函数和减函数——情况又如何？

（我不禁要提到一个有关的趣味数学问题。在线性代数课的开头常常遇到这样一个常规试题：所有复数的集合 C，是不是实数域 R 上的一个向量空间？讲求严格的人反对问题的这种提法，他们说应当问的是：是否有一个定义复数乘以实数的方法，使得加法群 C 是 R 上的一个向量空间？据传说，一个慌张的学生一次误读了这个问题，他以为问题是：R 能否是 C 上的一个向量空间。也就是说：是否有一个定义实数乘以复数的方法，使得加法群 R 是 C 上的一个向量空间。这是我最喜爱的一个趣味数学问题。如果你放弃回答，请看第 83 页。）

莱因霍尔德·白尔（Reinhold Baer）第一次到伊利诺伊时，他开了一门课，我旁听一段时间。早些时候，他定义了一个环的子环是整闭的是什么意义。定义似乎十分自然，太自然了。我听到的唯一的例子满足条件。我请白尔给我们举一个条件不成立的例子——他不肯举。他确实能举，但他没举。他说了一句不耐烦的挖苦话把问题轻轻带过继续讲下去。这是典型的白尔。他不但数学出色而且也高傲；他是个多产的数学家，一位专制的德国传统中有力的“Herr Professor”（教授先生），一位有文化素养的言语动人的健谈者。

他的工作方式有帝王气概（这一点我一向羡慕，但是从不敢去模仿），他使用助教的方法就是一个例证。助教们有一种责任是不断浏览图书馆刚收到的新期刊，挑出白尔感兴趣的文章。当然，他们得到指示，即使如此，他们做出取舍决定也得运用数学见识。结果是白尔不必阅读大量不相干的材料就能看到他想看的东西。

在伊利诺伊，他是世界学术界派来的一位受欢迎的大使。他在伊利诺伊待了很长一段时期，直到他55岁左右退休，开始领取一笔很说得过去的养老金。不过，除养老金不算，退休对他说来只是改变工作：德国政府对曾受纳粹粗暴对待的人感到内疚，因此任命他为法兰克福大学教授。他精力充沛地投身于这宗新事业；他艰苦地作出一些论文，培养出一些博士，他还是许多学术会议的积极参加者。他达到法兰克福的强制退休年龄时，开始领取法兰克福的退休金及伊利诺伊的退休金，而他在苏黎世大学又开始新事业。

他和我在伊利诺伊做了朋友，几十年间我们在许多国家不断会面。但是我没有再回头旁听他的课程，我认为他对于例子的态度很不好。

对数学应用于“现实世界”的不可思议的有效性表示惊讶，已成为以尤金·维格纳(Eugene Wigner)的漂亮词句为依据的陈词滥调。事情相反的一面是，数学在把严格定义跟我们的直观偏见相匹配方面表现出笨拙的无效。(事实也许是我们的直观是模糊不一致的，什么严格的东西也不可能跟它相配。我们都以为我们知道连续是什么意思，但是当我们得知一个函数在每个有理数处都不连续，而在每个无理数处都连续时，有些人就不免感到不舒服。(一个深刻得多、著名得多的怪物，是一条处处连续但是无处有切线的曲线。)我们都肯定我们知道连通是什

么意思，但是当我们得知一条由两部分组成的曲线（如一个圆和一条常常是在圆周围无限卷绕的螺线仍然称作连通时，我们不是难免怀疑吗？无论如何，我认为学生在知道这类的例子以前并不知道连续性和连通性是什么意思。

要彻底了解任何概念，少不得要有一大批的例子。我想要学新东西的时候，头一件事就是作出一个例子。固然，有时候这不能立刻做到：要证明一个实例的存在，也许需要很多理论，超过定义本身显露出的那么多的理论。例如，我们初学超越数时，存在这种东西，根本不是显而易见。我们初次听人说到可测集时，情况正相反。有很多这种集合，这点毫无疑问；找出一个不是那样的集合的一个例子，倒不是那么容易的事。

当然，反例也是例子，但是名声很坏：它强调否定一面，不是肯定、而是否定。正例和反例的差别常常只是语言和态度的问题，虽然也有一些理智上的正确性，但主要是情绪问题。康托尔集是一个漂亮的例子（一个内部为空的完满集）呢，还是一个别扭的反例（一个不可数的零测度的集合）呢？

无论是肯定的还是否定的，都是例子、例子，对我来说是全部数学所依据的例子，我始终寻找的例子。我开始作研究时先寻找例子，我不断寻找例子，例子我全都珍爱。

你还记得第 81 页上的问题（R 能否是 C 上的一个向量空间）吗？让大多数人大为惊讶，答案竟是“是”。

下面是这个问题的一个更成熟的叙述法：是否存在从 C 到 R 的群自同态环内的环同态？在这样的提法下答案显然是：是。理由：R 的加群同构于 C 的加群。不对？还没有看出来？那么想一下哈默尔（Hamel）基，它会使你想到 R 的加群是不可数无穷个有理数域 Q 的加群复本的直和。推论：R 的加群同构于 R^2 的加群。

统计学，不行

我们在哪儿能找到实例、非例和反例呢？答案：在我们找到定义、定理、证明和数学的一切别的方面的地方——在前人的著作中，在我们自己的思想中。那就是说，在书中、在发表的文章中、在预印稿中、在课程中、在讨论会报告中、在研究班中、在个人谈话中、在通信中——而首先最主要的是从我们自身，靠创造性思考可以找到。在我的初试后和论文前的学习开头，我主要是依赖书——老书和新书——后来我逐渐开始理解，主要是依赖期刊杂志文章。（至于预印本，当时这个词还不存在。）

我在数学图书馆的卡片目录中查阅“测度”、“积分”、“概率”和“统计学”，把吸引人的书名列为清单，然后去书库在摆放这些书的书架上去找。我从书架上没找到书单上所有的书（哪个人曾找到），但是我找到几本。我也找到几本别的书，夹杂在那几本书中间，看来很有意思，可是我查目录时没注意到。我取下书来，看了或许有三四十本。这一本看样子我可以读吧？看序言，那一本我就读不了吧（因为知识不够，因为书的专门宗旨与我不合，或者为任何别的理由）？第三本是用我读来有困难的语言写的？不到一小时，我找到十来本看样子合适的书。我拿着书摇摇晃晃走到出借台办好手续，把书带回家。

那些书我没有全读。哪一本我也没读。除我写的书不算，我能想到的只有两本书我曾读过，意思是逐字逐句读过，像读伊弗林·沃奥（Evelyn Waugh）和路易斯·卡洛尔（Lewis Carrol）那样。（我读过的两本书是克诺普的《函数论》，它是我译的；卡迈克尔的《群论》，它是由我校对的。）我的确读了所

有那些书的前一二十页，我浏览别的部分，前后跳来跳去。(我要是当初又读过许多别的书前十页才好——这样能得到极好的数学训练。)然后我将大部分书归还图书馆，再把另一大摞书抱回去。

霍布森 (Hobson) 的书在我的桌上放了很久，读来令人灰心。萨克斯 (Saks) 的《积分论》是圣经——也许是旧约——柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov) 的《概率论的基本概念》是新约。我对萨克斯的抽象积分的讲法非常热心，对柯尔莫哥洛夫的条件概率我感到有困难。波莱尔主编的那套丛书有些卷看来可读，但是我对大多数分卷感到失望——晦涩或无条理。我喜欢勒韦 (Levy) 和罗斯 (Roth) (“一本极好的书，但是为数学家使用需要扩大内容”)，我读到冯·米泽斯 (von Mises) 关于集体 (Kollektivs) 的权威名言，心情激动，简直像要中风。我发觉辛钦 (Khintchine) 难读但是有启发性，我一直没学会理解保罗·雷维 (Paul Lévy) 的窍门 [勒韦和罗斯中的勒韦不是哈里 (Harry)，而是海曼·勒韦 (Hyman Levy)，英国人，而保罗·雷维，法国人，是现代概率论中一个最伟大的名字。他的数学既具有深刻见解，又几乎完全不可理解，他似乎不明白所谓解释或证明是什么意思。]

我的学习是有方向的 (学测度论再学概率再学统计学)，但是我读书并不是按直线进行。我喜爱萨克斯，所以我离开本题，大量浏览《数学基础》。这本重要期刊在 20 年代和 30 年代达到它的光辉顶峰。在它里面我结识了塔尔斯基 (Tarski)、史坦因豪斯 (Steinhaus) 和巴拿赫及许多别的波兰大家。这类的碰大运 (在为另一个目的而读的一卷中读到“错误”文章) 总是有效。我劝所有学生碰碰运气。(顺便一提，它是反对专门化期刊的一个理由。如果你借出的那些卷里只有关于 C* 代数的文章，

你就没有机会碰到最近 25 年发表的有关李群的最佳论文。)

在我不能专心为我对概率的理解筑造一个牢固的逻辑基础的同时，我尽力走历史的道路。切贝谢夫（Chebyshev）和马尔科夫（Markov）做的是什么事？至于统计学，广泛的文献根本不存在。我浏览祖伯（Cuber），我借一些贺特灵（Hotelling）的笔记，我有机会去听耐曼（Neyman）的两三次讲课，尽全力原谅费舍尔本非数学家。这不容易。日记一则："尽力读费舍尔学习统计，亦不到。"学年将近结束（1937 年 5 月），我的耐心耗尽："再试读费舍尔和杜布的论文。我要搞概率，让费舍尔见鬼去吧。"

阅读和评定

除讨论会之外，还有研究生俱乐部，这是一种初级讨论会。在研究生俱乐部发言的是研究生和系里的教师，谈话内容是说明性的东西。也有一个私人小团体，"实变俱乐部"，只有六七名会员，我记得有基比（Don Kibby）、林兹楚姆（Andy Lindstrum）、梅克（Phil Maker）、维尔奇，当然还有安布洛斯和我。我们像"研究生俱乐部"，只不过我们所谈的都是有关或接近实变分析的题目（安布洛斯讨论康托尔函数，维尔奇讨论非可分空间，我讨论机遇变量），只不过（我们妄自尊大，自认为）我们谈的东西可能是高水平的。我在"实变俱乐部"里初识希尔伯特空间，我很高兴。

除此之外，同时我尽力用别的方法不断增加我的一般数学修养，例如读菲立克斯·克莱因（Felix Klein）的《初等数学》（"从高等观点出发"），和偶尔旁听鲍伯·马丁（Bob Martin）的一堂讲课。R·S·马丁（Martin）来自普林斯顿——一个不同

的世界，具有令人兴奋的活跃的现代气氛，拥有诱人的著名人物。他为人和善，机智敏锐。我由他第一次听到这句断言："其中含有的少于落到眼中的"(说的是塔尔斯基论真理意义的著名论文)。他懂数学，但是他不会讲。他善于谈文学、闲话、政治和历史，但是他所知道的数学对他来说太容易了，他常结结巴巴地尽力说明明显的东西。他班上的学生跟不上他讲话，说他是个坏老师，他死的时候就快要被解雇了。(他的脚后跟受了感染，我们几个人要给他输血，但检验结果只有安布洛斯的血适合条件，输血也无济于事。假使早四年发现了青霉素，青霉素可能救活他的命。鲍伯是位势论中著名的马丁边界的发现者，但是因为他发表的东西很少，死得又早，这个名誉常常归于别的马丁们。

研究生们花时间研究（他们最好花时间!）和诉苦（这个不用教他们)。我们诉苦的一个常见主题是博士学位评定制度及其后果。课程评分意义不大（许多教师似乎感到很难公平看待学生，给他一个低分数，而且特别是课程评分对一个科系要正确估计学生获得博士学位的机会几乎没有帮助。评定制度就是想要比较有帮助。办法是，研究生科系的每个人员评定他们所认识的每个研究生，把他的评定报告给信任他的主任办公室。只告诉学生他的平均分——不告诉个别评分。评分 1 意思是"最高博士学位能力"，评分 3 意思是"没希望"。

我们学生不看重科系对我们的评价。我们坚信我们了解得更清楚。到现在我不那么坚信了。从那时以来我的经验是学生往往过高评价学生；每个人坚信自己了解得不够，别人表现出的哪怕一星半点的聪明，都给他留下太深的印象。

评定结果是授予助教资格和研究员资格的主要依据。自从那个幸运的 1935 年第一学期以来，在每年 9 月和 2 月，我都热

切地希望（另一次意外？另一个教书的机会？）。在 4 月 1 日以前则急切地祈望宣布下一个秋季研究员资格名单的日子到来。日记在每个 9 月、每个 2 月和每个 4 月都报告坏消息——“没有工作”。最后一则这样的日记是 1937 年：“似乎是最后一次：我没得到研究员资格。”

抽印本：杜布的和别人的

当时还没有静电复印，使用预印稿虽然在技术上是可能的，但并不普及——那么你怎么吸收当时可利用的信息呢？答案：你可以订阅期刊或利用图书馆副本，或请作者送你抽印本。期刊价格并不是高得惊人。例如，40 年代初有一段时期，有一种特别办法：我现在记得，如果你加入 MAA（“美国数学协会”，内集团就叫他“协会”），你可以按每年 4 美元订阅《数学年刊》。至于利用图书馆的期刊，那要比现在人的想像方便得多。假若你想要看的论文刊登在一种尚未流通的期刊上，那也无妨——通常过半小时（甚至 5 分钟），那卷期就会送到你面前的阅览桌上；手头如有现成的纸和笔，你就可以知道你需要的东西。如果论文很长，你看得又慢，时间要拖长——你就得不断去图书馆，花许多小时看那一卷。不像拿几张复印件，躺在你自家的长沙发椅上那样舒服，但也不太坏。此外，如果你想抄写，尽可手抄，或者抄写关键部分。这不一定是浪费时间——你一面抄下去，同时也就学会了。

把资料抄下来代替单印本是普通做法，几乎每个人都喜欢应他人的请求，寄出别人要求的东西。有时候印刷品附带个人的通信。例如，我曾收到伟大的辛钦（Khintchine）寄给哈尔莫斯博士的明信片（在我得到学位前半年），当时我兴奋之极。他

称呼我“Sehr geehrter Herr Kollege”[1]，他因为手中已没有我所要的那些论文中一篇的样本而向我致歉。他寄给我一些有关的论文，希望这些论文能使我感兴趣。我感到自豪和光荣！

我是个贪婪的收集者。我给法国、德国、丹麦、俄国、波兰和日本写信，当然还给全国写信，我积累了一大批单印本。我曾有（而且仍有）保罗·雷维（Paul Lévy）、艾伯哈特·霍普夫（Eberhard Hopf）、伯尔格·耶森（Børge Jessen）、马钦基维茨（Marcinkiewicz）和齐格蒙德（Zygmund）和角谷（Kakutani）以及鲍赫纳（Bochner）、科普兰（Copeland）、费勒（Feller）、塔基（Tukey）、范·坎本（van Kampen）、冯·诺伊曼、维纳等人写的论文单印本。我很珍惜这些单印本，有许多份我已装订成册，做成高质量的、耐久的图书馆式硬布精装本；四部这种合订本，红皮、书脊烫金字，仍放在我的书橱中。这几卷可能是，或许有一天会成为珍品收藏家的藏品，其中包含霍普夫早期关于遍历理论的研究成果和可能是塔基关于统计学的第一篇论文。

我一得到这些单印本便读，我很欣赏史坦豪斯论$\sum \pm \frac{1}{n}$这样的级数收敛的概率，和论$\sum \pm \frac{Z^n}{n}$这样的幂级数以单位圆作为自然边界的概率。我与几位德国人莱欣巴哈（Reichenbach）、托尼埃（Tornier）、冯·米泽斯（von Mises）用于概率的神秘方法作斗争。他们写的东西有一部分纯粹是废话，我不禁想这是否与他们有人成为积极的傲慢纳粹党徒的动机有关联。最早通过无限积空间的测度来讨论概率的论文中，有一篇是乌姆尼斯基（Lomnicki）和乌拉姆（Ulam）写的。这是篇好论文，但是

① 德语："非常尊敬的同事先生。"——译者注

其中有个错误，一个大错，涉及非一致收敛。我努力读它，但是看不出错处。“数学基础”收有它的那一卷已许可发行，我家中有一本。有一段时间，两三个星期内乔·杜布几乎隔一天到我家一次，读乌姆尼斯基-乌拉姆的论文。他读也有困难。最终他指出错误，在随后的一篇他自己的论文中，指明怎样去补救这篇论文。

乔知道30年代初冯·诺伊曼和G·D·伯克霍夫发表的遍历定理，他是一个最早探寻这些定理与所谓强大数律的关系的数学家。我和乔有很多时候在一起，没有意识到他对我教育和启发的程度，而且我的大部分研究时间用于阅读和咒骂他的论文。日记条目，1937年4月25日：“一下午和晚上努力钻杜布的极限分布，去找杜布谈此。我是个呆子。”两天后的日记条目：“下午研究杜布论文。杜布是呆子；赢5美分。”

杜布性格开朗、自在，他似乎跟谁都容易相处。他似乎什么事也不认真对待，但是他同等认真对待每个人。他在知识上从不作伪。一度安布洛斯和我一心要制服他。关于时间和运动他说了些话（会不会是由讨论同伦引起的?）我们要求借集合、函数、参数等概念给出严格定义，他说：“你不能那么办——你不能把动态的弄成静态的”。纯粹胡扯。

他对条理、说明、语言或记号上的雅致没有感觉。这里有一个实例。在他早年的一些关于随机过程的论文中，他使用像“所有x（t）函数的空间”这样的说法［胡闹——不应当有变量的名称了］，隔几页后，他讨论这个假定：“x（τ）是“TXΩ上的可测函数”。后一表述意思是指映射〈x，τ〉→x（τ），这一映射把一个函数和一个点组成的对映到一个值。你应该想到t是变量，使用希腊文字母τ指别的意思。为这样的原因，和更坏的原因，他的论文就不容易读了。然而同时，他对观念的雅致有

很强的感觉，而且他还有深入的见解。我有时弄不清（在我对自己不是顶满意的时候），他和我在才能上是不是恰好互补？

研 究

一个大学生坐在那里，面前有一本打开的微积分书；或者是，一个尚未提出论文的研究生面对着一本书，那种书至少前10页的内容是他想要掌握的，或者是，一个从事研究的数学家或想要成为数学家的人，面对着一篇刚发表的论文——你现在做什么？你怎样做研究，怎样穿入数学中未探明的黑暗地区，怎样学到点东西？我能确实告诉你的只是我们的作法，而且我的确怀疑同样一种作法会对人人都管用。

我以前常常说过一句话，但此话不厌强调：要主动研究。别只是读，要去干！问你自己的问题，找你自己的实例，发现你自己的证明。这个假设是必要的吗？逆对吗？经典的特例情况如何？退化情况怎样？证明在什么地方使用假设？

我阅读时保持主动的另一个方法是改变记号法：如果我不能做别的，至少我可以改变（改进？）字母的选择。我的一些朋友认为这很傻，但是它对我倒管用。关于斯通的书第7章（关于重数理论，一个复杂题目的一章）当我对一个包含安布洛斯和杜布的研究班作报告时，我的听众取笑我改换字母，但是我感觉这帮助我在组织和综合材料时保持警惕。我感觉如果我不但怀着羡慕心情注视建筑，也必须把精神集中在砖瓦灰泥上，微妙细节就不大可能逃过我的眼睛。我选择比作者选择的字母（或其他符号）更中我意的字母（或其他符号），而更重要的是，整个题目中选择同样的字母或其他符号，统一我正在研究的文献部分的记号法。

改变记号是一个集中精神的方法，像讲课时记笔记一样，但它也是别的事情。它往往显示不同作者研究方法的不同，因此它可以指出比较自满的读者会有点赞赏的有数学深度的东西——对，对，这一定是昨天我在另一本书中读到的同一条定理。我相信改变我读过的一切东西的记号法，使之与我自己的记号法一致，终究会节省我的时间。如果我能做得好，我不必浪费时间将有关此题目的每篇新论文纳入事物的记号系统；我已经彻底思考过那一点，现在我可以继续研究更重要的问题了。最后，有个小问题，然而是有一些心理因素的问题：随着我不断把记号法改成自己的记号法，我得到一种有创造性的感觉，虽微小但非零——甚至在理解实际情况之前，在我能推广它、改进它或应用它很久以前，我已经是主动的，我正在做着工作。

学一门语言和学一门数学不同。学语言，问题是要获得一种习惯，学数学，是要理解一种结构。这种区别具有一些重要的涵义。从教科书学一种语言，你尽可照书的原样通读全书，作书中全部练习；重要的是不断练习使用语言。然而，如果你想要学群论，翻开一本书来读第一页，按顺序作全部习题，直到最后一页，这可不是一个好主意。这是个傻主意。照书中材料的编排说，线性读法的确讲得通，但是我们的读者是人，彼此完全不同，跟作者也完全不同，我们每个人很可能是对人家来说容易的东西自己却觉得难。我的建议是把书读下去，直到你遇上一个你没见过的新定义，然后停下来，尽力想出一些例和非例；或者是直到你遇上一个你不知道的新定理，然后停下来尽力去理解它，自己证明它——而且最重要的是，你如果碰上一个障碍、一个神秘的段落、一个无法解决的问题，就跳过去。往前跳，作下一道习题，翻页，读下一章，甚至丢开这本书，开始读另一本书。书可能有线性顺序，我们的头脑却没有。

你的配偶相信你说的一切吗？我的老婆并不总是接受我的高明意见。我老婆一度想读点数学，我给她提出我刚才说的关于跳读法的建议，她面带怀疑神色。然而，第二天她高兴又激动，指给我看一本有关的书的序言："看，你说对了，他们说的正是你说的"。果然，序言说读者不可"期望第一次读此书就理解书的各部分。他应当任意跳过复杂部分，以后回头再读；往往是一个论证会被后面的话澄清"。我老婆没注意到的是，"他们"并不正是独立印证的来源。"他们"是一个编缉组，各成员姓名列在扉页上，我是该编辑组的成员，"他们"说的话其实就是我写的。

只要我默想我是怎样通过眼睛来学数学的我就可能默想一会通过耳朵学习。听讲课是学东西的标准方式——一种最坏的方式。太被动，这是问题。标准建议：记笔记。反对理由：不错，记笔记固然是一种活动，如果你记，你就有牢靠的东西日后可回头参考，但是你很可能错过讲述的微妙细节以及大面儿，完整形式——你过分忙着了草地写字，无法注意。反对理由：如果你不记笔记，你就不会记得讲的是什么，是按什么次序讲的，很可能有部分时间你的注意力会减退，你会作白日梦，说不定你甚至很可能打盹。

赞成和反对记笔记的理由全对。我自己的解决办法是来个折衷：我记的笔记很粗略、然后，如有可能，我尽快改写笔记，改写成详细得多的笔记。我所谓很粗略的笔记，是指一分钟记一两个字略多，也可能是一两个重要公式，或一两个重要的图——刚够确定事件的顺序，顺便一提，足以让我保持清醒和警觉。我所谓改写，是指改写成相当详细，足以让一个不在场的朋友看后有希望让他懂得他错过的东西。

一次完成的演讲，例如讨论会发言，有时名声很坏，大概

是因为这种发言经常是很糟糕。它对学生有用吗？或者说对想学点东西的成年人有用吗？这种东西可能是明确的（我需要多知道点黎曼曲面的拓扑结构与全纯结构的关系）或只是心里的隐隐的慢性苦痛（我的数学教育太狭隘，我要知道别人在做什么，为什么做）。我自己的回答是，讨论会发言，甚至一些很糟的发言，对学习者也有用处（明确的或不明确的），我力劝我的学生和同事支持这种发言，去听这种发言。

什么缘故？一部分是因为数学是一个整体，各部相互连结，彼此影响。我们学的一切改变我们知道的一切，而且将帮助我们往后再多学。好的讨论会发言，目的明确，有鲜明的中心主题，组织得好，讲得清楚，显然有帮助——但甚至坏的发言也能有帮助。我最喜爱的例证是我曾听过的一次关于拓扑学的发言。我不理解那些定义、那些定理或那些证明——但是听见发言中提到“稳定同伦群”，几分钟后，提到“伯努利数”。我只是稍微明白一点稳定同伦群是什么，同样稍微明白一点伯努利数——但是正因为听那次古怪、惊人、骇人听闻的拼凑发言，我的知识扩大了，我理解数学（特别是讨论会发言）的能力更大了。（从那时以来，对于专家这已是家常便饭。）浪费 55 分钟，花 5 分钟时间得知亚纯函数的零点理论与素数分布有很大关系。

大家认为研究班发言情况不同，实际不然。一般想法是研究班的听众是由专家组成的，这班专家知道截至前天本门数学中已经证明的一切，参加研究班只是要看到最近的精品。这种想法是错的；好的研究班发言好，坏的发言坏，和讨论会发言一样。有人认为，如果把这种活动不称作讨论会而称作研究班，发言者在专业方面的不可理解的地方就成为概念方面的见识。这种想法是不现实的，是不对的。出席的“专家”们，是和发

言者研究类似问题的同行（但是要记住："类似"几乎总不是"同一"），或者那些尽力探索神秘的专门问题的研究生，比讨论会上的所谓"一般"听众只晚半分钟就闹得茫茫然、不耐烦，感觉腻味了。在我看来，好的研究班发言和好的讨论会发言可以交替去听——甚至坏的发言也值得听。



A・L・希尔兹，1969 年

最好的一种研究班有两名成员。它可以存在 5 分钟——一个问题，然后是一个不完全答案和一份参考文献目录——或者它也可以是坚强的协作团体，存在几十年，二者中间可以有许多不同的研究班。我极其赞成个人之间的数学交流，这也是我赞成讨论会和研究班的一个理由。我曾参加的最好的研究班是由艾伦・希尔兹和我组成的。我们每周有一个下午聚会，时间大约两小时。我们的聚会事先无准备，我们确实不是给对方上课。我们关心类似的东西，我们处得很好，我们各人都喜欢谈自己的思想，听者是聪明人，抱着同情的态度去听。我们交换

一周当中听到的初等趣味问题，在班上被问到的古怪问题，头脑中突然出现的半成熟题目，关于解决上周想到的题目的模糊想法，在别的研究班上听到的有启发性的意见——我们会兴奋得大叫，或者一声不吭一同茫然地盯着黑板——不论我们怎样，在存在此研究班的那一年当中，我们两人彼此学到很多东西，从中得到乐趣。我们并未完全终止协作，我们把讨论的结果写成合作论文发表——但是我们并不在乎这个。通过我们的讨论，我们变得……智慧了？……噢，也许更智慧了。

第五章　学习思考

可选停注

瑞·威尔德（Ray Wilder）曾任美国两大数学组织的主席。他是国家科学院院士，好几本书和多篇文章的作者。他从密歇根大学退休15年后，80岁时跟我说，他的研究时代肯定没有结束（促使人作研究的压力感也没有结束）。他仍旧读数学，参加讨论会，尽力跟上数学的发展。

按某种意义说，一个学者终生学习，但是吸收别人发现的知识（学习）和你自己发现一部分真理（研究），是一种很不相同的学习。1937年春季或夏季，我已进行的学习，使我达到一个阶段，我可以像任何人一样向某种隧道内看去，停止学习而开始挖掘的时候到了。杜布的确揭示一个方向，顺这个方向我可以寻找一篇论文(隧道),我不记得他也提示过前一两个定理。

基本思想是扩大推广对冯·米泽斯的*Regellosigkeit*（无规则性）原理的数学化。"随机"是什么意思？冯·米泽斯的回答一部分是：在科学实验室内或赌场中，一项实验的一序列观察值，除非完全无法预言，就不该称作随机。按赌场的语言，无法预言意味着不存在一套成功的赌法。举一个简单的典型实例，

试看一项只有两种可能的实验（是与否、开与关、0与1或正面与反面）的实验、两种结果有规律地重复，一分钟重复一次。杜布提出的这方面的一套赌法的定义是一个函数序列 f_1，f_2，f_3，……，第 n 个函数是一个 n 个变数的函数，函数值只有“是与否”。这套赌法的思想是，若把前 n 个结果 x_1，…，x_n 填入函数 f_n 的结果 f_n（x_1，……，x_n）为“是”，赌家就赌（$n+1$）号实验；若结果为“否”，则赌家不参加那一盘赌。（杜布用“可选停注”这个词来描述这种程序。）可能的具体特例：如果、而且只有最后10个 x 是背面，f_n（x_1，……，x_n）才为“是”。杜布对巧妙但不严格的“无规则性”原理的表述是下面的定理：将结果的无穷序列 x_1，x_2，x_3，……转换成参赌者实际下注的赌局的结果 y_1，y_2，y_3，……的变换保持所有概率关系。由此，因总概率为1，特别诸 x 的极限平均与诸 y 的极限平均相等。换句话说，不可能有成功的赌法系统，不管你用何种系统来决定什么时候下注，什么时候等待，你的机会和你每次都下注一样，不好也不坏。

杜布的定理是关于实验的独立重复的定理，我的问题是关于非必然独立完成的实验，看我们能有什么结论。我终将证明的结论是，可选停注不能改变的“公平性”，这是那种结论的典型。稍微说得明显些，设“随机变数” x_1，x_2，x_3，……是非必然独立的，但它们在这个意义上描述一个公平赌局：给定前几个赌局的结果 x_1，……，x_n，赌博者对第 $n+1$ 赌局的条件预期总是0。（注：因此，赌场的条件预期也是0，赌局同等对待赌桌两方。）例：赌博者每天赌总降雨量，降雨量超过5毫米他赢，否则他输。观测结果不是独立的——如果星期一下雨，星期二就比较可能下雨——但是付酬方法要使得这种赌博成为公平赌博。也就是说：星期一是雨天星期二又下雨，星期二付酬少，星

期一下雨星期二不下雨，赌博者的损失大，号数的安排使得条件预期胜局平均为 0，不论上星期的降雨量如何多或如何少。在此情况下，赌博者利用可选停注可以增加赢的频率，但是由于事先规定的付酬办法，长期看来在金钱上仍是持平。

我写成学位论文许多年后，吉米·赛维奇（Jimmie Savage）和我在芝加哥大学合教一门讲随机过程的课程。（我们多少是隔周轮流讲课）。有一周该我讲赌博系统，在班上我弄胡涂了，慌乱一团。到那时我已研究过数学的几个别的分支，概率不再能在心中自然浮现。因为杜布的书是我们的指定教材，我看看这本书，尽力想恢复镇定。一看我大吃一惊，原来杜布很大方地把有关的两三页（309—311）的内容说成“据哈尔莫斯的研究成果”——50 年代我感到最难的东西正是 30 年代我奋力攻读的东西。

环滑车

学位论文不是自发灵感的产物——至少说我的学位论文不是。写学位论文的过程好比一部不大令人愉快的旋转木马，一部环滑车，少见的美好时刻和许多令人灰心丧气的日子混杂在一起。1937 年 6 月某日的日记：“有思想真有趣，即便这思想结果并不好”；两天后：“思想结果的确好，有思想更有趣得多”。次日，恼怒：“谁也不知道保测变换的任何性质”。许多天后：“做研究工作……坚持研究……我真想知道答案……我越是深入阅读学位论文，我知道的越少”。后来在 10 月：“通常欢快的杜布讨论会，……读杜布的论文有很大进展……开始学位论文！”3 天后：“紧抓住学位论文，……慢敲慢打”，过一星期后：“心热起来…… 作完定理——欢欣鼓舞对杜布”。环滑车照这样

继续向前，猛跌到一个特别坏的低点，跟着是一个早来的高点，然后在我的最后一学年的几个月当中又出现一个令人气恼的刺激性的低点。

杜布好共事。他不逼迫我，有时他鼓励我，他总是愿意听你表示意见。不过，我们并不是在天堂里工作，我们是人——有的时候他对我失去耐心，有的时候我认为他可以多给我些帮助。在出现特别坏的低点时，我必定是过分烦扰了他，问了他太多琐碎细节的问题，那时他就失去耐心。他的原话我忘了，但是意思我确实还记得："这应该是你的论文，你知道，但是我们照这样做下去，就要成合作论文了，这显得对你不大好。"

这话触动了我。我加劲地工作，日记的语气几乎变得欢快了："下午解决连续情况，……全天作学位论文——好玩极了——无法叫这混蛋级数收敛，……找到想要的Gegenbeispiel[1]，……也许就要出定理了——渐近定理看来有希望，……得出大数定律的不变性，……开始用蓝铅笔删改论文——苦差事，……，打出论文又填写（要填写的有多少填多少）——看出连续随机过程有作论文的新机会。"

（"填写"的意义大概再没人懂了。在那个年代，它是数学稿子打字必不可缺的一部分。你的打字机要是有加号和等号，就算你走运，但是希腊文字母和不等号，更不要说积分号及数学家爱用的其他怪样符号，却是闻所未闻。我怀疑现在是不是还生产什么不带空半行棘轮机构的打字机，当时这种设备算是高价的奢移品。结果是数学稿子打字要先打文字，留出足够空白填别种字母和怪样符号——打好之后，你翻回来，用钢笔填写下标和其余你略掉的东西。在我完成学位论文约10年后，我打

① 德语：反例。——译者注

印我的书《测度论》时，几百页的原打字件和5份复写件，我用手填写6倍几百页的每一页——只要不使用既昂贵、效果又不太好的直接复印机，没有别的办法弄6份印件。）

我的大喜来得太早了——我急切称作我的学位论文的文章没有及格。一月的一天下午我的日记写着："论文遇杜布摊牌了。哪怕我再费10年，也要让他们看看！浮浅，嗯?!"专业上的意见分歧没有伤害我们的友谊；那个星期晚些时候，日记写着："在很好的网球赛中打败杜布"。

从此以后情况好起来。往后一则接一则的日记："得出结果？……整天作点儿——不烦恼，因为我工作起来很高兴；……上午8：30抓紧——下午4：30放；……今天有些结果——巩固阵地，进步很大；……今天作得好——论文的两点重要补充……作Gegenbeispiel（反例）——作完；……大喜，乐观——情况极好。"（1938年）3月半，我花四天时间复制我再次希望中的学位论文，然后交给乔。次日："乔为脚注恼火"。但是一个星期后："我实际上就是博士"。

我是不是已传达出我研究工作的惊人而光辉的上下起伏现象的感觉？首先，你感到兴奋，因为你了解问题，急于处理问题。有大量下层林丛要清除，令你忙碌不停，让你认为你有些成绩——然后你被困住。你工作不停，你每星期（每天？每小时?）试走一条不同道路，你走来走去，你吃饭时想它，你走路时想它，你作梦时想它，但是你停滞不前，似乎什么也出不来。

我逐渐认识到实际情况，我开始明白我不能就定理最后的普遍形式正面着手提出定理——我总得设法把定理及其证明分解成最简单的特别情况。我不断简化问题。我把测度空间做成有限集合，我给可选停注函数加上限制条件，我以2来代替无穷，我以常数来代替收敛序列。凡是作过研究的人，都明白需

要这样做。正如波利亚（Pólya）的格言所说：你不能解决一个问题，那么就有一个较为容易的问题你不能解决——找到它！

我终于找到了它，我做到我能看穿的平凡情形——这就是突破。下降期已经过去，我正在上升中。下余的就是工作——令人振奋的、有报偿的、辛苦之极的工作。挤出证明，简化技术，扩充结果，得出系定理，最后大功告成。在我光荣完成论文一个月后，打出正本交研究院；另一份同样文本寄送杜克杂志发表。它的略嫌骄横的说明性标题是“某些随机变换的不变式：赌博系统的数学理论”。顺便一提，光荣只持续几天，也许一周——然后是“为什么我在如此长的时间内未能做出什么事”。

工作，没有

在我做学生的最后一年中，并不是把每一分钟都花费在了学位论文上——但是例外的那些分钟集合的测度非常接近于零。

在那一学年的开始，1937年9月，我第一次参加美国数学会——AMS或简称“学会”——在宾夕法尼亚州立学院的集会。我不认识一个人，一切都生疏，我没学到很多东西，我感到孤独。

那年当中，我常常玩“撞球”，读巴拿赫的书，娱乐身心。读巴拿赫的书是一种嗜好。日记有许多条，例如“一整天读巴拿赫，……我是个巴拿赫迷，……巴拿赫可不太容易，……靠沃恩（Vaughan）的帮助，早晨攻下了巴拿赫。”

噢，是的——赫比·沃恩（Herbie Vaughan）。他是个仍怀有大志气的年轻讲师，最近从密歇根来的一位拓扑学家。关于

数学及其他事情我们谈得很多，12 年后我们合作写了一篇两页的小论文“结婚问题”。由于这篇论文，我们成了研究组合问题的著名人物。这篇论文可能是有我的署名的论文中的最常被引用的一篇。结婚问题是假定一个可能无限的少年集合中的每个人和一个有限的少女集合熟识。赫比提出一个对有限情况的归纳证明，比以前的任何证明都清楚，而我通过吉洪诺夫（Tihonov）定理提出一个对无限情况的拓扑学证明。赫比进而得出一个巧妙推广的系定理，他称之为“著名的修士问题”。关于它的历史背景，他引用了巴尔札克的《滑稽故事》中不存在的一段话“修士和初学修士”。这段话给了许多读者深刻印象，我不时收到来信，请求指明引文是在书的哪一页上。

1937 年—1938 年我积极读的东西，有尼可丁（Nikodým）不断发表的关于拉东—尼可丁定理的几篇论文，朱理亚的《量子论》和新出的每一期“数学文摘”——我们几个人急于得到最新消息，几乎是彼此抢着看。

另一项重要活动与论文无关，却极费时间，就是打印求职申请书。当时还没有静电复印，而食不果腹的研究生也用不起文书服务。我打出 120 份申请书，邮寄出去，每天检查几次信箱，不见回信。接到过少数几封来信——比我记得的上次谈这件事的时候说的两封要多，但也多不了许多——我的日记说是 5 封（如果一条看不清的日记说的是回信，那就是 6 封）。日记提到哈佛好几次：3 月 8 日，“等哈佛来信”；4 月 1 日，“哈佛没有消息就是好消息”；最后，在 4 月 7 日，“沃尔施（Walsh）教授表示遗憾”。4 月晚些时，密歇根“回复几句话”；三天后“密歇根？”；5 月 6 日，“等回信”；5 月 11 日，“没工作——等回信”；5 月 20 日，“密歇根希尔得布兰特（Hildebrandt）教授表示遗憾。哥伦比亚、堪萨斯、俄亥俄州立大学也表示遗憾”。

收到的回信总数：零。

要找工作，我当然得参加美国数学会在夏洛蒂维尔举行的春季大会，而且作为新近入会的会员，我行使特权，谈了10分钟我的论文。美联社照例派两三名记者来观察这帮数学家的动态，但是那些记者看到重要报告的标题就大大泄气——他们不明白那些话是什么意思。也就是说，他们没看到标题后半之前不明白，等看到后半部分——关于赌博法的部分，就有兴趣了。J·R·克来因（Kline）是学会秘书，他问我是不是愿意接受采访。回答当然是“愿意”。采访很有意思，而且对解决工作问题也有帮助。记者跟我谈得很愉快。他们在“美联社电”中发出一则短讯。美国大多数报纸很容易忽视这则通讯，但是对本州《伊利诺伊日报》来说，它却是条热点新闻。它是热点新闻，不但是由于“本地少年做好事”方面，而且为了另一个理由。原来是琛佩恩正在进行一次反恶习的几乎周期性的斗争，市长老们反对醇酒、美女和欢歌——偶尔也反对赌博。对我的采访正合时宜，我的姓名在大字标题中用大写字母印出：“你赢不了——P·R·哈尔莫斯说”。

博士学位最后的考试是走过场，我和大家一样，顺利通过。我又高兴又得意。我现在仍高兴和得意，因为我曾经是杜布的学生。（顺便说，我是他的头一个学生。他在两三年之内共有4名博士生，然后有一段空白——过几年后他再培养出博士。第二个、第三个和第四个博士生是安布洛斯、基比和布莱克威尔。）考试一结束我松了口气，我心想“再也不考了！我一辈子再也不用参加另一次考试了！”——有些天早晨醒来我对这一点仍感觉很好。我没有参加结业式，我不赞成这种形式。我让他们把博士证书邮寄给我，我把它归档存放。我现在还有这份证书，但不是装上镜框，挂在墙上——它只是归档收起，放在旧成绩单

下面。

我获得博士学位那年，全美国有68人获得数学博士学位，名单见于美国数学会公报1939年卷。68人中12人是伊利诺伊大学出身。这12人中有一人是内茨沃格。我认为，除开他不算，我是12人中最优秀者。我想起我不断申请但从未得到、而所有别人却得到的那些研究员资格、助教资格和工作，心里仍有点怨恨。

独立自主

第二年，大致说从1938年7月到1939年7月，是一个间歇期。生活过下去，发生好些事情，但是当时好像是、现在回想起来仍好像是，我得能跑多快就跑多快，可我就是仍停留在同一地点。

8月初，我做了一次病脚的小手术。（“小”也许是外科大夫的用语。以后两个月的初期痛，然后的不舒服，然后的懊恼，一直烦恼，在我看来需要一个给人更深印象的词。）在康复阶段，大夫建议我使用手杖——因而从此以后我一直使用手杖。现在我还用我的第一只手杖，磨光了，漆皮早脱了，还和新的一样好。

8月晚些时，我得到最后两份工作消息：杜克不成，伊利诺伊同意。多年后杜布告诉我，杜克的系主任J·J·哲尔根(Gergen)告诉他为什么没聘用我。（他说，“我不想要任何避难者”。）伊利诺伊的肯定意见是怎么闹的，至今我心里仍是糊涂——也许一半是出于怜悯，当成安慰奖？我不是对那份礼物吹毛求疵，但是我的日记很怪，写得并不愉快。薪金每年1800美元，责任是每周教课15小时。这种条件是标准条件。而且，光荣！我得

到光荣，我是大人了，允许我教微积分了。

班级是有个性的。有的班态度合作，有的班别扭，有的班和气，有的班阴郁。1938年秋季学期我有两个班是三角。都是2小时课程，两班接着上课。——一班是周二和周四早9点上课；另一班是在10分钟抽烟时间之后10点上课。我喜欢9点钟那一班，讨厌10点钟那一班。两班的差别可能是我的过错，至少一部分是。9点钟上课我头脑清新，很想看看我想出的讲法如何受欢迎。我说笑话，他们笑。我们彼此喜欢。到10点钟我精疲力竭，我讲得死板得多、溜滑得多，快得多。我说同样的笑话，可是他们眼瞪着我。我们彼此不喜欢。

每周15小时现在看来是沉重的教学负担，但当时我们都学会适应它。在我一连串教三班的日子，我抱怨——这还叫工作！但是我仍有时间做研究。我没有任何委员会职务，或任何行政职务，我教15小时的课后，余下的研究时间比后来能余下的要多。

以研究而论，我是独立自主的——一种骇人的方式。当然，杜布仍在左右，但他不再是“老师”——他只是一个比我年岁稍大、聪明得多的朋友和同事。鲍伯·马丁也在左右，他在若干星期当中对我有帮助。在那些星期内我尽力要证明一个级数收敛，我一次又一次不断证明它逐项被调和级数控制。安布洛斯不在左右，他接受了阿拉巴马大学的一份临时工作。我们大量通信——每周两三封长信——但这跟面对面谈话总不一样。

这一年的日记所表明的，主要不是不知道答案的环滑车效应，而是不知道问题的比较令人灰心的环滑车效应。下面是一连串的这种日记（从7月到12月）的样子。“有了研究想法，希望它管用。……全天为问题的细节焦虑、感觉格外地好。我认为我真得到了点结果。现在假如我只能找到答案……整天紧紧

抓住问题，但是还没有感觉茫然若失……紧紧抓住研究。关于我是数学家，我深深怀疑……作研究时激起热心，然后又撞上空墙。为研究工作的未来发愁……放弃研究问题……形式较好的不等式；仍不完备……跟杜布闲谈，得到关于不等式的好暗示。工作，大喜。生活真好……心想着我的级数白白闲荡。我的研究让我泄气，但是我还没有放弃……在我的不等式上又浪费了一个下午……让人急躁气恼的日子。写出最近半年的工作结果，6页的浮浅东西。"

和这种日记夹杂在一起的是一连串简记，说我寻找一条出路。"我读数学一天不能超过4小时。(我现在仍不能。谁能呢?)……为研究数学的前途烦恼。决定搞代数。这东西真有趣。处处找 Gegenbeispiel（反例）……我感觉今年我学到很多数学……我已经（再!）决定改变研究领域，看我是否能在某种真是数学的数学中作研究：希尔伯特空间和一些同源题目。保罗·雷维的东西见鬼去吧……读温特纳（Wintner）的《谱论》有趣之极……一个接一个倒霉日子，只有温特纳的《谱论》来美化生活……我以为找到了我的研究领域，但是这会很费劲。"

我有一个理论，起初是下意识的理论，后来是深思熟虑的理论，认为保持年轻的办法就是时常改变专业领域。我从未真正成为代数学家，但是我的确从测度论（我有意要它包括概率论和遍历理论）变到希尔伯特空间，然后又变到代数逻辑，然后又回到希尔伯特空间，还涉猎拓扑群和统计。大约30年之后，在1968年左右，我认识到我不能再改变了，而且大约在同时我开始写比较说明性的论文（例如"希尔伯特空间的10个问题"）和说教性文章（例如"如何写数学"）。

一个时代的终结

并不全是教课和研究——在那个年代我仍有时间练钢琴，至少练一点儿，我也有时间读书，看几场表演，而且我得抽时间不断申请工作。

我需要读品彻勒(Pincherle)的东西。为了能读品彻勒，我费了艰苦的一天，靠一本意大利文词典和一本语法，"学会"意大利文。我读了"儒利雅(Julia)线"正规族和毕卡(Picard)定理，尽力读了点积分方程，花了不少时间读乌斯本斯基(Uspensky)论概率的书。在这期间我读了几本查理·查恩(Charlie Chan)的书，布里浮特(Briffault)的《欧罗巴》，达希尔·哈麦特(Dashiell Hammett)，尼罗·沃尔弗(Nero Wolfe)，语文学(还叫语言学吗?)，多萝茜·赛尔思(Dorothy Sayers)，萨基(Saki)，埃勒里·奎恩(Ellery Queen)，厄普顿·辛克莱(Upton Sinclair)的《丛林》和赫尔曼·外尔(Hermann Weyl)的《空间·时间·物质》。

星期六下午我听托斯卡尼尼的广播音乐，去看 *Ruddigore*(本地业余爱好者)、《淑女香消》和《大错觉》(我最喜爱的影片——我看过 14 遍)。我熬夜——在午夜睡觉，或午夜 1 点或 3 点或甚至清晨 5 点睡觉，还有很少几次，熬过通宵。

我还要打字，打申请书。我不知道那年我寄出了多少封申请书，但肯定很多。我申请超级好事由(国家研究委员会研究员)、好事由[哈佛的本杰明·皮尔斯(Benjamin Peirce 读做 Purse)讲座讲师职位]和普通事由(任何地方的任何教学工作)。那年我收到的回信比较多，但都是"不行"、"不行"、"不行"。从 2 月中开始整个春季不断寄来回信。国家研究委员会 4

月初回绝，哈佛几天后回绝；5月初加利福尼亚大学寄来简短回信，终于失败。日记不断提到信件。“早晨大批信件；没有信是好消息。……没有信件……在这种成败未定的疑云下生活可不愉快……我真想有份工作。……西雅图大学来了坏消息。……”

最后，在5月中旬，吹来一阵疾风——柯瓦利斯的奥勒岗州立学院（当时的名称）有一份临时工作缺人，当然我尽可能努力争取这份工作。没有面谈——太远，太费钱——但是有几封信和少数几件电报——6月中旬我拿到了这份工作。一个月后，在7月中旬，我表示歉意辞掉它！

事情是这样的：7月7日安布洛斯接到普林斯顿高等研究院来信——他是研究院两位备选研究员之一，第一个指定人选已回绝邀请。我说，啊，不行，你别去，你不能对我那么做。假如你去研究院，那么我也去——任它是地狱火海，我也要去。（顺便一提，安布洛斯不同意我关于事情的这种说法。他说，他不是备选研究员，反正我们怎么能知道他是呢？——这种事情通常是不泄露给有关人的。他也许说得对，可是我只能照我的记忆讲事情经过。至于我们怎么能知道：或许只是根据日期的迟晚——像这种研究员的任命通常是4月1日宣布——可能是根据一封解释、道歉的信——“我们未能早邀请您，因为……”。主要事实无可争辩：安布洛斯接到邀请信，我决心和他在一起。

我做出不切实际的计划，然后又放弃；我不断抱着希望，然后又心灰气馁。我计算大概的花费，给我父亲写信：我可以借1000美元吗？我的希望和计划是在数学大厦中为大家所认识的。萨姆·坎贝尔（Sam Campbell）——一位研究生同学——我将永远满怀温情记着他，自动提出借给我300美元（事实证

明，这笔钱我不必要接受)。我父亲资助我。我写信给奥勒冈要求放我走，如愿了。下一个来月当中，我重新安排日常生活，心情兴奋。我转让出我的公寓套房租约(容易——公寓套房难找。我卖掉自行车，把我的书和笔记打包，在 1939 年 8 月 25 日，就是初到美国 10 周年的前四天，我乘火车到普林斯顿。年轻博士们没有汽车。) 9 天后第二次世界大战爆发。

第六章 研究院

公 用 厅

对身在美国的大多数人（包括我）来说，这场战争只是令人焦虑、兴奋的一系列很遥远的新闻报导——直到两年后美国参战，战争才开始影响我们的日常生活。在此期间，生活如常。萧条尚未过去，不过已经开始减轻。公共汽车司机开公共汽车，医生行医，高等研究院的研究员做研究。

当班贝格（Bamberger）家族接受建议，答应资助这所研究院时，提建议者亚伯拉罕·费莱克斯纳（Abraham Flexner）写信给三四门学科中6位至8位顶尖人物，问他们“你们的学科中6位到8位顶尖人物是谁?”只是在数学方面他得到近乎意见一致的答复（1933年开始成立时只设数学研究所就是这个缘故）。6位教授是亚历山大（Alexander）、爱因斯坦、莫尔斯（Morse）、维布伦（Veblen）、冯·诺伊曼和外尔。

1939年我到普林斯顿时，研究院是个舒适的小机构。普林斯顿所有的数学家，包括大学的和研究院的，生活中心是范因大厦（Fine Hall）即老范因大厦，它至今仍是我理想的数学大楼。幽暗的走廊，加铅的窗子，厚重的家具，磨旧的地毯。公

用厅永远开放，总是在使用；图书馆现代化，藏书完备，由本妮·希尔兹（Bunny Shields）铁腕管理。希尔兹细小身材、满头白发，她大概天生仿佛像五十八九岁，作风严厉但总是乐于助人。

普林斯顿大学数学系有几年把好客风气扩展到研究院。我在研究院的第一年是这几年的最后一年。人人都容易认识。有一段时间我感到不自在，仿佛让盛情淹没，但是有些研究生[主要是阿瑟·布朗（Arthur Brown）和约翰·奥姆斯提德（John Olmsted）]给我庇护，不久之后我感觉像一个本院旧人，自己也欢迎新来者。

我实际上住在公用厅（the common room，不是“commons room”。真见鬼！那是这两个词由英国进口时，在大西洋中部某地发生的一次粗心误听。你在 the commons 吃饭，你在 the Common Room 闲躺。）我躺在舒适的软皮睡椅上磨蹭时间，读科幻小说杂志，我尽力在游戏桌上下好围棋和军棋，每天下午茶点时我大吃巧克力点心。每天早晨或午夜，那里总有人，关于数学、战争、大人物的怪癖或附近吃炖牡蛎最好的馆子的谈话总是不绝于耳。

每人——噢，几乎每人——都来吃茶点。艾森哈特（Eisenhart）和维德本（Wedderburn）（这是老艾森哈特，微分几何学家，不是他的儿子，统计学家）有时来，莱夫谢茨（Lefschetz）和鲍南布拉斯特（Bohnenblust）常来。鲍赫纳（Bochner）、丘奇（Church）、福克斯（Fox）、汤姆金斯（Tompkins）、塔克（Tucker）、威尔克斯（Wilks）——普林斯顿数学系人人都来。“研究院”教授们不那么见得到，维布伦来，但是爱因斯坦不来。资历低的但当然是博士后的研究访问者，例如我，也在场；所有的研究生总来。茶水点心免费，听说是捐

赠的。管理房屋的工友每天把茶水点心摆出来，后又洗茶具，所得的额外报酬也是资助的。

人人都知道军棋吗？——或许不是。这是国际象棋，可是需要三副棋盘。两名棋手背对背坐着，各有棋盘，裁判在他们中间，有他自己的棋盘。白方在自己棋盘上走一步开局，然后黑方在自己棋盘上走子；裁判在中间棋盘上重走双方的棋步。然后又轮到白方走棋（为避免混乱，裁判喊出顺序），然后轮到黑方走，如此等等。两方哪一方也没看到对手的走法；只有裁判掌握双方所有的棋步。如果一个棋手轮到走棋时要走一着走不通的棋（因为他的棋子须穿过的方格有些个他不知道已被占据）或不合法的棋（譬如说因为他将自己的王），裁判就说“不行”。根据积累的“不行”，渐渐地棋手能猜出对手的棋子在哪里。比赛的目的和棋赛一样：将死对方的王。

“闪电棋”是一种古典棋，走子要求极快——两步棋之间只有两秒的样子。有些喜欢猎奇的人甚至试下过闪电军棋。

“围棋”是一种古老的盘上游戏。“美国传统词典”给这个词下了一个奇妙的不正确定义：“一种两人玩的日本游戏，在分成 361 个小方格的棋盘上用石子似的棋子来下。”错在数目不对。棋盘的确是分成小方格，但是棋子不是放在方格内（像国际象棋那样），而是放在角顶上。角顶的数目是 19×19＝361，但方格的数目只有 18×18＝324。棋子形状大小一样，一半棋子是白子，一半是黑的。粗略地说，围棋的下法是：白方出子来包围连成一片的黑子，黑方也用同样下法来对付白方。规则并不太复杂，但是大战略和详细战术却复杂得可怕。我曾听懂围棋的象棋大师说围棋比别的棋深奥得多，难下得多。

国际象棋，桥牌，围棋，军棋——这类玩意在公用厅中几乎总在进行。

范因厅的两大人物是莱夫谢茨（大学）和维布伦（原属于大学，叛逃到研究院）。他们是多采多姿的人物，有神秘魅力的领袖，公用厅中不尊敬人的年轻人给普林斯顿大学生咏数学系的标准歌曲添上了这样几句歌词。

这是咏唱那维布伦，奥斯瓦尔德，
英格兰和英国茶的热烈爱好者；
他建立了数学家乡间俱乐部，在那里
你甚至可以沐浴。

不错，维布伦是个热心的亲英派；不错，范因厅里有淋浴设备。这首歌有另一个版本，认为艾森哈特参与了范因厅的设计，那个版本中，咏维布伦的最后两行是：

数学名家里他是唯一
需要有四钮扣扣住上衣。

维布伦穿的夹克衫确实与众不同，又长又直，几乎是军服样子，使人想起所谓的尼赫鲁衫。

维布伦是个有力的管理人材。他熟悉数学界，他把许多比他年轻的数学家安置在适当的工作位置上，因此他得以发挥巨大力量。他是几何学家，把“位形分析”（拓扑学）介绍到美国，他起了很大作用。

莱夫谢茨是这两人当中成就较大的数学家和更富于戏剧性的人物。年轻时他是个化学家，后来在一次实验室事故中失掉了双手。从此结束了他的实验室工作。莱夫谢茨决心做数学家。把天生的双手换成一对好看的木手，外罩手套。这对假手使用

不便，但是足以握钢笔或拿粉笔。写出的字迹粗糙歪扭，但是可以认清。

Friday

Dear Halmos:—

The proof of the J.n.f. was sent to you before I had a chance to check it up (I was ill). Cross out lines -7, -8, …, -13 of p.1.

P.2. Proof that K_1 is invariant is given ahead.

P.2 line 11 $K_1 = K \oplus K_n K_1$.

Hope that this is clear

Sincerely

Lefschetz

莱夫谢茨来信，1964 年

莱夫谢茨是个性情压抑不住的外向型人，健谈，说话动人。他法语、俄语和英语说得十分好。晚年他学了西班牙语，在墨西哥讲过许多课程。他以铁腕主办《数学纪事》——论文的题目他若不喜欢便不接受那篇论文，他从当红的作者中征求论文

——主要是他，把《纪事》办成了一流的杂志。他不把数学看成逻辑，而看成图画。他的见识极高，但他的“证明”几乎总是错的。他时常以一种好斗的口吻打断讨论会发言者的话，提一些我当时认为是愚蠢的问题。我现在比较明白了：这是一些精明的愚蠢问题，提出来帮助那班害怕问这些问题的沉默羞怯的大多数。系歌中咏他的歌词是这样的：

> 这是咏唱那所罗门·莱夫谢茨，
> 像地狱一般地不可预知；
> 一旦他下世去魂归黄土
> 即时把上帝骚扰得六神无主。

世界中心

我们关于各种东西，如房屋、人、房间、书或人群的大小的记忆，通常远不如对东西的其他可感觉方面，如颜色、形状、气味或声音的记忆可靠，但是不论是真是假，根据我的记忆，我可以说在40年代初普林斯顿数学系是个小系。系里教师约有十来位，研究生至多二十来名。至于研究院，我可以肯定——我面前有一份当时的油印通信处名单——人数也少：6位教授，一位“准教授”［即沃尔特·迈耶尔（Walter Mayer），他的名字我还记得是一种同调论二作者姓名之一］，大约20名访问研究员（每学期略有变化），和一位秘书布雷克（Blake）小姐。当然，我说的是数学家；也有人文学者和经济学家。但是尽管我们多数人都关心，他们的姓名很可能仍未列入名单。

有五六位访问研究员称作助教——理论上，一位教授有一

名助教——但是亚历山大性格十分羞怯，因此他通常没有助教。他属于一个古老家族（亚历山大大街就是以其一家族成员命名的），很有钱。传说他一次看到一座可以滑雪的小山，他就把小山买下。他爱好音乐，喜欢声音响亮——关于这点，另有一个传说：他设计了一只巨大无比的喇叭，下面达到地下室，喇叭口占据大半个起居室地面（他的妻子不以为然。）他和冯·诺伊曼是朋友，在他家或冯·诺伊曼家曾多次聚会；聚会不忌酒。

有一年亚历山大宣布要作一系列关于同调论的演讲。第一次演讲吸引了大批听众。我也去听讲，结果既高兴又失望。这两种情绪的原因是一个：演讲信守诺言从头开始，讲得很抽象，很公理化，因此我可以理解，但是为同样原因，我的理解不很深入。几天后作第二次演讲，完善主义者亚历山大宣称他对第一次演讲的公理基础不满意——他现在要再从头开始。第三次演讲又发生同样事情。第四次演讲延期——跳一周。后来又有几次延期和跳过，但是全部6次演讲都真讲了——都重新从第一页开始。第6次演讲后，亚历山大放弃这门课程——他就是不能让他的讲法具有他想要的完美形式。

研究院的教授们行政职务不重。他们开会，但次数很少——每年的主要问题是从申请者当中挑选下一年的研究员。亚历山大觉得甚至这点行政工作也繁重，因此他辞职了。有一些周折，但是最终辞呈“奏效”。亚历山大把教授自贬为“永久研究员”。

爱因斯坦和冯·诺伊曼差不多跟亚历山大一样，在行政工作上不花多少时间。就同有组织的大学数学界的联系来说，维伯伦是行政长官。不过，回到普林斯顿大学，莫尔斯和外尔二人把他们的工作解释成具有教育功能。每个资历浅的访问研究员应邀至少和二人中一人私下会见，有时候和两人都会见。我应邀和外尔面谈过，我觉得这是一次可怕的经历。他拘谨有礼，

他问我目前对什么数学感兴趣，他询问我的长期研究计划，他建议我准备一篇发言，在他主持的现时文献研究班发表。是的，先生！

虽然普林斯顿的数学社会总人数只有五六十人，在一定意义上它却是个无限大的集体。几乎每一位从国外到美国生活或访问的数学家（当时有许多人来到美国）理所当然地在普林斯顿停留一天或一年。已经在美国的数学家，每当去哈佛或耶鲁或别的什么地方时，都在普林斯顿落脚。居住在附近的数学家，住在哥伦比亚大学的或纽约大学或罗杰斯大学的数学家，时常顺便来访，作报告或听报告，或只是喝杯茶，下一盘围棋，闲谈数学。在讨论会或研究班上发言的研究生和新近获得学位的博士们，与世界上最著名的数学家彼此竞争。普林斯顿是世界中心，不只是普林斯顿的数学家们这样想。

小 人 物

我们年轻人在研究院得到的最大激励，既不是来自于那些教授们，也不是来自于那些已经著名的访问学者们，而是由彼此得来的。我初结识富比尼（Fubini）时，见他是一个小得可怜的人，讲一口不连贯的糟糕英语，这显然同他的不朽荣誉富比尼定理很不相称；克林（Kleene）（一个巨人，说话声如闷雷，有一套超精细的记号用法，尚未达到事业顶峰，但地位已确立）和哥德尔（Gödel），一个瘦小枯黄、性情羞怯的人，躲避跟人接触，一个传奇人物、魔术师；当我初结识他们的时候，说真的给我留下了深刻印象，但是我从他们那儿没学到很多东西。我从一些初学者小人物如伐尔亚（Valja）[全称伐朗丁（Valentine）]、巴格曼（Bargmann）、马伦·代伊（Mahlon Day）、多萝茜·马

哈兰（Dorothy Maharam）和拉尔夫·菲立普斯（Ralph Philips）学到东西，同他们交换意见，受到他们的激励。

另一些人在当时是同样地“微末”，但是由于其研究领域不同，对我的数学影响较小。他们是盖莱特·伯克霍夫（Garrett Birkhoff）和克劳德·舍瓦莱（Claude Chevalley）（很感人，敏锐，吸烟多，说话快，总是激动兴奋）。有些人与大学有关系，与研究院没有关系，（但谁敢说呢？）他们是埃德·毕格尔（Ed Begle）、雷欧纳德·艾森巴得（Leonard Eisenbud）[一位数学化程度很高的物理学家，他目前被认定为那位百合花般纯代数学家大卫·艾森巴得（David Eisenbud）的父亲，令他自豪]、拉尔夫·福克斯（Ralph Fox）（音乐会级的钢琴家，属于前三四名的最优秀围棋手）、格哈特·霍赫希尔德（Gerhard Hochschild）（说带德国口音的南非英语，所有永恒算命者当中最愉快、最和善的人）、亚瑟·斯通（Arthur Stone）（最近发表著名的化方的方问题一个解法的一组数学家之一）、约翰·塔奇（John Tukey）（正忙着写莱夫谢茨的书）和亨利·沃尔曼（Henry Wallman）（因“胡尔维茨（Hurewicz）与沃尔曼”而出名，嗜好所有电器装置如收音机的懒汉，他后来移居瑞典，从此一直住在瑞典）。我在普林斯顿的第一年当中，讨论会的发言者包括马克·卡兹（Mark Kac）（最近由波兰来到普林斯顿）、诺曼·勒温森（Norman Levinson）、巴克莱·罗瑟（Barkley Rosser）、保罗·史密斯（Paul Smith）和奥斯卡·札里斯基（Oscar Zariski）。我们怎能不相信我们是处于世界中心呢？

我在普林斯顿最早结识的一个人是保罗·爱多什（Paul Erdös）。当时他26岁，获得博士学位已有几年，一直从一个博士后研究员跳到另一个博士后研究员。当时他的英语很好，现在仍很好，只是带有浓重的外国口音；我的匈牙利语几乎全不

带外国口音，但是已日渐生疏。我们同意彼此讲英语。虽然我稍年轻，但是我自认为在世故人情上更聪明，所以我教训爱多什："做研究员这种事倒是满好，可就是不能干很久——工作难找——你最好放机灵点儿，找一件实际的正经工作。"我怀疑他听我的话。从此以后他一直行踪不定，不断旅行，演讲，参加研究班，有时隔不久甚至讲课——过着持手提箱四处漂泊的生活，每遇到一个愿意合作的人便谈数学，并且写成百篇论文。在我给他教导40年后，爱多什尚未发现有必要找一份"正经"工作。

我不喜欢爱多什喜欢的那类组合-几何—算术问题，但是他在这方面十分高明。也会有人问那种他全不了解的数学问题，此时他就要求告诉他各个基本词的定义；如果他的集合论"计数"技术适用，他就会进而找到解答。一个典型的例子是希尔伯特空间内有理点集合的维数，这是胡尔维茨提出的问题。爱多什不太清楚希尔伯特空间是什么，而且他也不明白"维数"是什么意思。亨利·沃尔曼告诉他定义——不久爱多什就得出解答。(答案是1。)论文在1940年发表在《纪事》上。这是爱多什对几个月前他一无所知的一个题目具有专业重要意义的贡献。

工　作

在普林斯顿"乡间数学俱乐部"，任何人（包括我）是怎样工作的？我在普林斯顿的日子充满快乐的回忆，例如，同斯特罗特（Strodt）和安布洛斯一起的3小时散步，每天下围棋、围棋、围棋；抽时间做一副旅行围棋盘（在361个棋子点钻小孔，用图钉代替棋子）；下围棋胜爱德华·拉斯克（Edward

Lasker)；观看建造富尔得（Fuld）大厦（未来的研究院大楼）；在公用厅中闲晃。晚上适合社交；下午3点去鲍尔特喝杯热巧克力（这是个巨大的快餐点，全贴白瓷砖，看上去不像饭馆，倒像浴室，整夜开门。）至于爱德华·拉斯克——他和伟大的国际象棋冠军埃曼努尔·拉斯克（Emmanuel Lasker）不是一个人，但他也是象棋大师，还是著名的国际象棋和围棋类书籍的多产作者。

除其他活动外，我还有时间读罗曼·罗兰的《约翰·克利斯朵夫》和海因利希·曼（Heinrich Mann）的《纳瓦尔的亨利青年时代》；为申请公民身份证而跟官僚们争辩。我一直是美国公民，但是我没有一份看上去够正式的文件为证——我想在战时这种文件可能有用。现在它没有用——我根本不需要它。很久以后，我住在安·阿伯尔时，经常要通过加拿大边界，我请求移民归化局发给我标准的美国公民身份卡。卡上有我的照片，至今已过期20年。身份卡未注明我现在是公民，上面倒写着我曾宣誓声明"我是美国公民"。这样一来，如果我在文件上有疏漏，我的罪名将是假誓罪。

尽管有社交和官僚干扰，工作的确是做了，人人做了，包括我在内。在爱多什发现文献中一个反例之前，我曾费几个星期的时间，尽力要证明测度的一个扩张定理。我固执地不断找好的新问题来作，不断地工作。反例令人失望，但同时也让我精神松弛下来。我时常费了几个星期力图证明一个伪论断——我一旦知道它是伪论断，就有一种胜利感。有了进步，得到了知识，朝向真理又迈进一步。

听冯·诺伊曼讲的课，是朝向真理迈进的最漂亮的一步。他讲的是算子环（现在称作冯·诺伊曼代数），他以典型的冯·诺伊曼风格，一开始先讲经典有限维西几何。起初我觉得他的课

有启发性但讲的是初等内容，然后我发觉他的课给人以教导，越来越好，不久我的日记写着："冯·诺伊曼讲谱，力度很大……。冯·诺伊曼把人弄迷糊，但是谱和算子有趣极了。"



J·冯·诺伊曼，1948年

休·道克尔(Hugh Dowker)那年是冯·诺伊曼的助教，他想研究同调群，不想搞算子。我倒喜爱算子，每次讲课都去听，细心作笔记。休没有自己的笔记，就把我的笔记拿给冯·诺伊曼—— 公开的，放在台面上，无意欺骗——琼尼赞成这份笔记(人人称他琼尼)，而我——哦，我嘛，可能是由于这份笔记，维

布伦把我请去，告诉我从第二学期起，我终于就要取得研究员身份了！

工作和工作之余

在工作和游戏之间的时间我工作，研究院的大部分别的成员也是这样。传统的"绅士派业余爱好者"态度稍有一些——你不可显得过分努力，不可显得像一个苦读的学生——但是如果我们必须在不用功和用功时被人撞见之间选择一样，我们选择后者。

我的工作习惯我认为我特别可能被人撞见。我躺着的时候、散步的时候，泡在澡盆里的时候，都能思考。有的人喜欢在这种随便的情况下进行思考。斯蒂夫·斯梅尔（Steve Smale）在我的普林斯顿时代多年之后说，他在柯帕卡巴纳海滩晒太阳时作出了他的一些最好的成果。不过，就我来说，真正的工作，就是指坐在大桌子旁，满处是散放的论文、书籍和笔记，自己来写。这令斯里姆·舍尔曼（Slim Sherman）感到担心。他见我在范因厅中坐在阅览桌旁，一小时又一小时写着，问："那篇论文到底多长呢？你从哪儿弄到那么多东西要写？"

这是真正的工作，但是我要说的是另一种工作，游戏和工作之间的工作。我一直在读斯通的书（到现在我仍没有读完书的全部内容），我尽力研究冯·诺伊曼关于连续几何的笔记，我读庞特里亚金（Pontrjagin）的《拓扑群》。雷默（Lehmer）夫人［通称为埃玛·雷默（Emma Lemma）］的英译本刚出版，是一本让人开眼界的书，给人启发的书，引起激动的书。真的，惊险小说——我读它像是读侦探小说，要找到案件的正犯。我认为它是一本写得很美的振奋人心的好书，给大对偶定理的每个

新方面作了说明，举出例证和应用，读来令我惊喜不已。

至于发现我自己的新数学则进展慢得多。我为使自己相信我还活着，写成前一年当中在伊利诺伊作出的那"6页浮浅的东西"投稿。《纪事》把它印出，但它根本谈不上一大成功。费勒在《数学评论》第一卷中的评论不算不客气，但是很严厉。他指出，我的强大数定律的必要条件即使对于弱大数定律也是必要条件。他进而评论，我的条件是他本人以前研究过的条件的一个推论。他说得对，虽然当时我还没遇见他，我写信告诉他，他说得对（费勒教授大鉴：您说得对。……"）。不久以后，我们做了朋友，我们一起大吃大喝，吃过许多龙虾，喝过许多瓶伏特加。



W·费勒，1964年

费勒是个热情奔放的人。他宁愿弄错也不肯不作决定。他更喜欢别人听到他的见解而不大喜欢别人热烈赞扬他的见解。

我们加入的集团相信吸烟容易引起肺癌，这足以使费勒对这个结论表示怀疑。我不知道全部事实，我不能说他不对，但是我认为附和他的说法是对他不负责任。出于他这样地位的人的轻度怀疑可以解释为有力自卫。他说话很快。声如洪钟，带浓重的南斯拉夫口音：话语之间透出机智、魅力和谅解。他爱谈这样一件事：有一回他和妻子尽力要把一张大圆桌挪到餐室里，他们又推、又转、又用力拖，可就是无法让圆桌穿过屋门。费勒又恼又累，抽出时间来画情况的简图，找到一个切实可用的数学模型，他证明他们尽力要做的是做不到的事。同时，他一面在作证明，克拉拉则继续摆弄桌子，这样歪一歪，那样斜一斜，左拉右拉；等证明完成时，桌子已经在餐室里了。

一篇差劲的论文和一本相当好的书

我第一次连续在研究院待了三学年（1939—1942），三学年混合起来，往往成为怀乡的一大记忆。（我的日记1939年未停写。）我的谱论文属于第一年，“初等矩阵论”属于第二年，和柯伯尔谈判回到伊利诺伊属于第三年——但是通常各种事件似乎不能编列成总的次序。那三年当中的两个夏季，一个夏季我是在琛佩恩度过的，部分时间同迪克·赖伯勒（Dick Leibler）合作；另一个夏季我在坎布里奇度过，在哈佛教暑期班。

“谱”论文大概是我写的最差的论文。写这两篇论文是由于我突然认识到实值有界可测函数（譬如说在单位区间上的）的集合，其代数结构和希尔伯特空间上有界埃尔米特算子的集合的代数结构非常相似。（当然，像鲍赫纳和冯·诺伊曼那样的人一直都知道这一点。）因为我是搞概率论的，我看出把随机概念算子化有优点。随机变数的分布函数对应于算子的谱测度；二

随机变数的无关性又对应于什么算子概念？如果我这个编辑现在收到一篇论文，硬性内容和那篇论文一样少，我会当即拒绝它，但那时我认为它没有问题。不算顶高明——我还有保留意见——但是没问题。当我战胜保留意见，决定扩大我的出版物清单时，我把这篇论文寄送“我们的英雄盟国”苏联出版的一份杂志，果然《数学汇刊》接受了它，（用英语）刊出。

矩阵问题又是另一回事——在某种意义上，它是我教过的最令人兴奋、最成功的课程。我发觉冯·诺伊曼 1939 年的演讲既优美又有启发性，而在 1940 年我有意传播这句话。这话的接受者就是普林斯顿大学的研究生。未经校方的事先安排，我干脆在范因厅的公告牌上钉一张卡片，说我要开一门叫“初等矩阵论”的课程，（我就着手开这门课）。我细心备课，不少学生（约十一二个）经常来上课，其中两人记笔记。他们是巴兰金(Barankin)（他后来成为加利福尼亚大学的统计学家）和莱瑞·布雷克斯（Larry Blakers）（拓扑学家，后来回本国澳大利亚）。油印的笔记在普林斯顿附近流传了一段时间。我发觉这两份笔记非常宝贵；我的第一本书《有限维向量空间》就是根据这两份笔记写成的。

至于钱的问题，普林斯顿欣然同意无偿接受我的服务。到期末，我的服务得到校当局的承认，使我稍感意外。我收到正式请求书，要我给这门课判分——就普林斯顿大学和学生来说，这门课算研究生学分。作为教师，从我的观点看，这门课极好。愿上的才上，没有关于先决条件和分配要求的一套废话。没有课程表，我们想谈什么就谈什么。没有家庭作业，没有考试。我根据课堂上和课间讨论的主观印象来判分。这是理想的课程，知识和思想移植到了那些急切接受知识思想、愿意为知识思想而工作的头脑中。

根据一门课程的笔记来写书是写书的好办法。好作品——任何一种清楚的信息交流——最重要的唯一特色是有组织、有条理。如果你知道一连串事物应当按什么顺序来说，如果你知道你强调某些部分而贬低别的部分需要做到什么程度，你的信息交流战就打胜一大半。当然我在讲矩阵课程之前先组织课程，但是对一班好学生讲准备的材料，在重新组织课程时也大有帮助。它帮助你改变着重点，在适当地方插入例子，润色词句。

我就写东西。我爱组织我想要说的话，一组织好，我就找mot juste[①]，我认为我找到mot juste时感觉很好。尽管如此，我仍觉得写书是辛苦活儿，辛苦的慢活儿。预备矩阵课程费了几个月（或者说，如果我算上学生时代努力攻读鲍彻尔和狄克森的时间，那就是费了几年），而且那几个月是紧随听冯·诺伊曼讲课和作听课笔记之后。在进行矩阵课程的几个月当中，我又花许多时间为一次又一次的演讲作准备。一旦课程结束，巴兰金一布雷克斯笔记也在手头，我就费半年时间写这本书。每天上午写两三小时。

我把最后定稿送交冯·诺伊曼，请他考虑让这本书在数学年刊新丛刊（橙色丛刊，目前仍很走红）中发表，他赞成并接受这份稿子，但是几天后他告诉我他遇到了一些阻力。数学研究丛刊不是应当侧重研究一级的著作而不重视说明性的东西吗？——这就是问题。这问题问得恰当，以前（第三种为哥德尔的《选择公理的相容性》）和以后（第15种为莫尔斯的《函数论中的拓扑学方法……》）《丛刊》的历史表明答案是肯定的。然而，不久《有限维向量空间》还是被接受了，列为第7种出版。结果令普林斯顿大学出版社很高兴。理由是，丛刊中许多

① 法语。意为：正确词。——译者注

卷是赔钱的优惠书;《有限维向量空间》没有优惠,销路却很好。《有限维向量空间》在普林斯顿出书,前后 16 年,我的收入是零美元、零美分:《丛刊》的作者没有版税。1958 年,诺思特兰出版社出第二版时,普林斯顿出版社好心把版权卖给了凡·诺斯特兰出版社,按传统价 1 美元。

协 作

1940 年夏,我做了一件坏事,为此我一直感到羞愧。

那年夏天我在琛佩恩度过。迪克·赖伯勒正在那里,重叙旧好,自是快乐——我们以往关系一度很密切。我们常一起玩落袋弹子戏。曾同住一套公寓房,我们在数学上有共同志趣。(迪克是特里津斯基的学生。)那年夏天,我们开始先谈了一些数学问题,这仿佛是协作的开始。问题是求出保测变换何时有平方根。谈到平方根问题,—1 这个数常常起特殊作用,在这个问题中也是如此。—1 这个数是否诱导酉算子的本征值,情况大不相同。我们得出的结果并不深——大多只对于纯点谱这种特例成立——却是新结果,我们认为这些结果也算有趣。

在我们的谈话当中,我感觉迪克并不像我那样急于求成,抱有野心,坚持“得分”。一次我们约定聚会,他没有来;另有几次,我认为他没有努力做好应做的自己分内的工作。夏天将尽,我打字打出我们完成的工作清单,我给他一份。我说了这样的话:“迪克,你看看这个,告诉我你感觉怎样。如果你认为这真是合作的成果,我们就算它是合作论文,否则我自己发表。”这话说得不漂亮,后来发生的事更糟。大约一天后迪克说“不错,我认为是合作成果”,我说“我认为不是”。(双方原话我不记得了。)论文最终只以我自己的名字发表。

我们没有争斗，我们没有反目成仇，我们的关系没有产生裂隙，但是我们之间的情况从此再也不一样了。有一阵子我不断去看迪克，问他一起去看电影，但是在以往35年当中我怀疑我们是否遇见过十来次。我们相会时不冷淡也不是不和气，而是彬彬有礼。

我现在知道，我那时所说的是坏话，是对他的侮辱，是蠢话。我对迪克在这项工作上贡献的估价并不是客观判断的结果。

至于合作论文对一位学者名誉的影响，至少就数学来说，我所说的话虽不是百分之百正确——但是接近百分之百。有些数学家总想叨旁人的光而出名。如果你的论文大部分是合作论文，某些爱嘲讽人的院长和主席就会弄不清你自己在论文中占多大分量。实际上，一些卓越而有创造能力和创新精神的数学家，其发表的论文大部分是合作的。

然而，最重要的一点不是这个，而是协作的联姻原则。著名的一对伟大协作者哈代（Hardy）和李特伍德（Littlewood）极力支持这条原则。该原则是，协作一旦缔结起来，就不能分开。一旦开始一场可能出协作结果的谈话，那么由此得出的任何结果，或好或坏都是协作的结果。参与协作的人对最后结果的贡献也许在数量上相等——同样数目的定义、同样数目的定理、同样数目的证明——也许不等，这都毫无关系，不要去计较。也许这个合作者提供见识，那个合作者提供技术；也许这个合作者提出问题，那个合作者充分熟悉文献，避免浪费时间去寻求已经知道的解答；或者，也可能这个很积极，而那个是个陪衬，用以保持他的信心和灵感。没关系——一旦协作开始，由此得出的任何结果都必须称为协作产物。

测度与哈佛

1940年至1941年冯·诺伊曼主讲不变测度。他开始先讲一般测度论，进而讲哈尔（Haar）测度及其一些推广。那年角谷（Kakutani）在研究院，他和冯·诺伊曼关于这个题目谈了很多。这些谈话揭明事实，提出证明——课程内容，尤其是末尾部分，有不少是演讲前一两个星期或两三个星期刚发现的。那年（和第二年）我是冯·诺伊曼的助教，因此作他的演讲笔记不但是我爱作的事也是我的职责。（天下这种走运的人不多：做他爱做的事还可得到报酬。）在交付打字稿之前他读手写稿，有时在边白上草草写出评语。我很自豪，记得在我给单调类定理作的证明旁，他写下了"好！——新！"之类的话。

笔记作成打字稿。我现在仍有一份，另外两份保留在研究院中——冯·诺伊曼自留一份，院图书馆保留另一份。我听人跟我说，那以后又复印了几份，但是这份笔记从未正式出版。我怀疑它现在仍有很大价值，因为许多材料已过时，废弃不用。

我自己的研究逐渐趋向于遍历理论（对象为测度空间的范畴的态射理论）。我证明了关于将保测变换分解成遍历部分的一个富比尼类型的定理——置换分解为循环在测度论中的类似结果。跟着，安布洛斯、角谷和我进一步将这结果从单个变换推广到流（单参数变换群）。当时角谷的英语还不像后来那样近乎完美，但已经很好，而他在语法规则方面的知识比安布洛斯和我要广得多。在写出我们的结果时，安布洛斯成为主书写员，我是主校对。角谷并不仅仅是温和地赞成我们写的东西，他想要改变我们的一些惯用结构。虽然他总是保持说话温和有礼，但他的声音不容易被压倒。安布洛斯和我很喜欢他，但是我恼怒

了。我咕哝，"这人脸皮真厚!"。

到夏季，哈佛出了一个小小的紧急情况，我和其他几个年轻人一道被聘请去教暑期班。我曾听说过哈佛有超级研究生，这是真的；那时以来我曾遇到过几个这种人。不过，在暑期班，或至少说在 1941 年夏季，微积分班没有什么超级学生；有许多人是差生，在春季不及格，想利用夏季赶上。

那是一个愉快的夏季。索姆纳路 17 号有几个房间，陆续不断有年轻的访问数学家来往。卡普兰斯基曾在这里住过，我在这里还曾遇到过莱昂·阿劳格鲁(Leon Alaoglu)和赫伯·罗宾斯(Herb Robbins)。莱昂很久以后娶了一个不爱吃大蒜的女人，这是他的生活悲剧。

古典力学

1928 年，冯·诺伊曼在德文《数学年刊》(*Mathematische Annalen*)上发表他的极小极大定理，从此开始有了现代对策论。1941 年，冯·诺伊曼和他的朋友，经济学家奥斯卡·摩根斯特恩(Oskar Morgenstern)协作，编写出了一本关于对策论的巨著。从那时以来，对策论成为数学的一个确立的部分。1941 年秋，冯·诺伊曼开始他的研究院讲座，主讲对策论时，这门数学尚处于摸索、成形阶段。当时我是冯·诺伊曼的助教，作演讲笔记是我的职务，但是我并不高兴作这份笔记，也没作很久。这门数学从此走红，并且几乎立刻流行起来，某人(想不起是谁)代我作我代道克尔作的角色。对策论让我心冷，我把注意力集中在遍历轨迹上。我很高兴把作笔记的特权让给热心人。

至于遍历理论，我有两项协作。我成为这两项协作的一部分，既高兴也自豪。一项是同琼尼·冯·诺伊曼的协作。

同冯·诺伊曼合作的论文要点是证明“一切测度空间是同一个”（当然，这句话要有保留地去理解）。我以往学的是抽象测度论。就我而论，欧几里得空间的古典理论只是一个特例，不具有特殊测度论的优点。琼尼是比我老一两辈的数学家，他受的是比较古典式的教育，当然他聪明绝顶，也懂得抽象讲法。不过，有许多旁的、通常是年纪较大的分析家，一见抽象东西便厌恶——他们总是不相信它，或许按我的苛刻的想法，他们不真正理解它。在比欧几里得空间更一般的空间（例如在概率论中）需要定义测度时，他们只在把一般情况化为特殊情况时才感到舒服。这种简化采取的形式是当时关注的概率空间（例如，布朗运动理论中产生的概率空间）与单位区间之间的对应，这个对应把勒贝格测度从单位区间带到所研究的空间上。由于人们想作并有可能作这种简化，结果许多讨论概率的论文开始时总要先建立一个（完全不必要的）从某个集合到单位区间上的映射。在这方面多次越过界线的人是诺伯特·维纳（Norbert Wiener）。

我在这种简化中看出一个型式，我希望存在一个祖先简化法，用以推论出所有这些简化。当然，我跟冯·诺伊曼谈了我的问题和我的初步工作，他对我很帮忙。最初我说“谢谢”，然后我说“哎呀，多谢，这帮助很大”。不久以后，结果和技术有一半（至少一半）都是他作出的。我非常高兴——瞧我！——我和冯·诺伊曼协作。

我不以我在我们合出论文中的角色为耻，我认为我已努力做好分内工作。不过，至少有一个结果是百分之百出自冯·诺伊曼之手——我敢肯定，因为我记得我发现那个结果的详情细节。我需要知道是否可能存在某种“坏的”、病态的集合。我们在琼尼的办公室里谈论，我们两人都站在黑板前；我完全被难

倒，而琼尼则着重利用连续统假设，通过微妙的超穷二重归纳法踏步前进。走到一点，他停下来问我是不是不想把我们眼前的发展作成笔记。我心急又不耐烦而且自傲，便说“不用，不用，我懂得，我会记住”。啊，你能猜想发生了什么事。当晚在家里我大吃一惊，原来我不懂得——或者是我干脆忘了——反正要我的命我也写不出来了。之后，我垂头丧气地回去找琼尼——他已离开市中心几天。那是仅有的一次我见他发火。恼怒只有几秒钟，但是可清楚看出。他跺脚说“啊，真见鬼……”。(他一句话没说完，但是我可以听见话尾：“……我早告诉你要记笔记!”）问题，主要的问题是他也忘了思路结构，得再从头开始，碰上同样的障碍，重新发现障碍周围的道路。

书作完后，我的工作是抄好送交出版。琼尼作了许多改动，我们不断把手稿彼此传来传去。我大获全胜，但是我记得有一场战役我败了。我想在论文开头就给维纳一个讽刺。我的初稿第一句话是这样的：“本文的目的是一劳永逸地把一切可能映射的测度空间映到单位区间上。”琼尼删去“一劳永逸地”字样。

论文标题是我的主意。我读过琼尼1932年发表的标题为“Zur Operatorenmethode in der Klassischen Methanik”（古典力学中的算子方法）的论文，甚感钦佩。我们的合作论文以略为抽象的形式继续那篇论文的部分成果。对我来说，我能和那位可记念的前辈连系在一起，是圆了我的梦。我怀着几分踌躇，提出这个标题：“古典力学中的算子方法，Ⅱ”，琼尼也好心地接受了这个标题。

生 日

1941—1942年这一年中，有一些著名人物来研究院访问，

然后又有一些人来，钱德拉赛哈（Chandrasekhar）是其中之一，还有伟大的解析数论家卡尔·路得维希·西格尔（Carl Ludwig Siegel）和逻辑学家兼哲学家塔尔斯基。不过，在我心中有突出地位的那位访问者根本不具有动人魅力。他就是汉斯·萨默尔森（Hans Samelson）。他很快成为我的一个至交，他也是在我那有卓越成就的一年中我的另一位协作者。

我是在一天早上第一次听说萨默尔森的，当时冯·诺伊曼待在我小小的办公室——和他自己的豪华的办公室相连接——请我做萨默尔森第一天的接待者。为什么不做？——这正是职务的一部分——但是我没有因这项任务而感到兴奋。我见到汉斯和他的激动慌张的美丽妻子若娜特（Renate），领他们到院内自助食堂去吃午饭。[她的英语经验不足，她十分慌张，竟记不起相当于carrots（胡萝卜）的德语词是Karotten。] 我指给他们研究院附近的一些地方——这里是图书馆，这里是公用厅——开车送他俩去他们的套房。杂务办完。

汉斯的论文是关于拓扑群的拓扑学特性，而我同冯·诺伊曼的工作则涉及拓扑群的测度论特性——我们显然有些共同点。我们很快就发现这个题目尚有一些没有解决的有趣问题。我们在午饭时和下午茶点时交换思想，然后，我们晚上经常彼此通电话，报告取得的进展。在这些谈话当中我们发现一种力量强大的技术可以解决有关拓扑群的问题——常常是你只须拿起安德列·韦伊（André Weil）关于这个题目的书，一页一页翻下去，最后就能找到你要找的东西。有时这种技术不管用，那么发现我们的主要结果（紧单生群的代数刻划）就会有一些乐趣。

人的记忆力是一种奇妙的功能。在汉斯和我共同写出论文40年后，汉斯有机会讲述写论文的前前后后。按他的说法，他甚至不知道我们在写论文，直到我拿给他看我准备的有我们两



H·萨默尔森，1977年

人署名的手稿！不对，汉斯，不对！——你全弄错了。我记得十分清楚。我们决定该写出论文的时候，我们掷硬币来赌输赢，结果我输了——硬币表明汉斯要担任写的工作。汉斯的字迹始终看得清。例如，第一句开头是“一个拓扑群称为单生群（仿范·丹齐希（van Dantzig)”——而且，对也罢、错也罢，我认为“仿范·丹齐希”是一种德语措词法，我决不使用。就是这样！

汉斯和我一直保持联系，时常彼此过访，每年交换生日贺卡。你记得生日问题吗？一群人中任何两人生日相同的概率为1/2或更大，这群人的最少人数是多少？得出的答案很有趣，原

来是 23。当然这就是说，任何时候你见到譬如说一群 40 个人，你应欣然同意打赌，甚至赌钱，他们当中至少有两人生日相同——对你有利的机会事实上是 10 比 1。反之，如果只有 15 个人，你企图通过赌生日重合得钱就是愚蠢之举。我们当然知道，我们相识后早就发现，我们不仅生于同年，而且事实上生于同日——3 月 3 日，时刻彼此相差不过几小时。[目前尚存的占星术士：我们的生日与格奥尔格·康托尔（Georg Cantor）——1845 年——和埃米尔·阿廷（Emil Artin）——1898 年——生日相同，这有什么意义吗?]

[计算机和手持计算器可以是好东西，也可以有坏效果。生日问题可用来作为一例，说明一个坏效果。着手解决此问题的一个好方法是把它颠倒过来看：一群人生日各不相同的概率小于 1/2，这群人的最少人数是多少？稍加思索就会知道，你需要做的只是$\frac{364}{365}$乘以$\frac{363}{365}$，然后把这积乘以$\frac{362}{365}$，再继续乘以$\frac{361}{365}$，$\frac{360}{365}$等等，直到第一次答案低于 1/2。换句话说，问题等于说：求最小的 n，使得

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{365}\right)<\frac{1}{2}$$

指出的积受下式控制：

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{365}\right)\right)^n=\left(1-\frac{n-1}{730}\right)^n<e^{-n(n-1)/730}.$$

断言的控制出于几何平均与算术平均的著名关系，最后不等式可以由 $1-x<e^{-x}$ 推出。结果十分精密。当、只当 $n>22.499$ 时末项小于 1/2。

问题的推理基于每个学数学的学生即可接近的数学工具。

生日问题向来是一个绝好例证，说明纯思维胜过机械处理的优点。一两分钟即可得出不等式，然而作乘法时间要长得多，出错误要容易得多，无论使用的工具是铅笔还是老式台式计算机。现下价廉而使用方便的计算器，尤其是可编制程序的计算器，几秒钟就可得出对一切概率（不仅 1/2）和任何天数（不仅 365）的答案。计算器得不出的是理解，或更高等的、广义的论的坚实基础。可惜。]

是好是坏，到时候全要结束。那是伟大的一年，我结识的许多人成为著名数学家，例如杰克·考尔金（Jack Calkin）、乔治·麦基（George Mackey）、迪安·蒙哥马利（Deane Montgomery）和吉米·赛维奇。我确实跟柯伯尔商谈过，在年初从他那儿得到伊利诺伊的一份工作。工作不容易得到。我没有拿更好的工作、更好的地点来赌博，而是立刻接受了他的建议。我很高兴把事情解决了，我心满意足——“我完全操纵了柯伯尔”，我说。“他，你”，安布洛斯说。

第七章 打赢战争

回伊利诺伊老家

珍珠港事变日是1941年12月7日，之后的3年半时间美国在打仗。战争影响了一切，影响了每个人——有时候影响很小，有时候很大。首先，有征兵活动——我这年龄群的所有男子都受它的影响。只有很少正从事研究的数学家被征召，但已足以使我们都意识到被征的可能。我们大部分人在整个战争中缓期服役，因为当时极需要我们做教师。我知道，假使征召我，我也通不过体格检查（由于我的脚病）——对我来说，征兵只是天边隐隐的威胁。

我很幸运。战争是种种不便（物资缺乏、配给，旅行困难，住房问题）的来源，但不是个人悲剧；它令人兴奋，它结束萧条，它有可能结束法西斯主义。战争的头半年，我仍在普林斯顿度过，然后即结束我的普林斯顿年代，迁到伊利诺伊，当准教授，年薪2200美元。"准教授"是伊利诺伊的一种奇妙的残余教师等级，它介于讲师和助理教授之间。它的存在加长了攀登学术阶梯的时间，我怀疑有时候用它当做一个架子，把人放在上面，让大家忘掉他。我确实知道，有些人在伊利诺伊退休

后成为荣誉助理教授。

对我来说，去伊利诺伊有回家的一切有利条件和一切不利条件。我不是英雄出征凯旋归来——但是我稍稍有点那种感觉。我以往害怕的倔强的老系秘书沃尔斯（Walls）夫人，欢迎我回来（“真的我们让你回来了——你一向做了大量研究工作）。我认识那建筑、那校园、那街道、那市区，最主要的是，认识那些人。我又可以和乔·杜布在一起了。同时，回到同样的老地方，我已不感到新奇和兴奋，当然也见不到新人。普林斯顿把我惯坏了，伊利诺伊正好可以矫正。

就伊利诺伊说，我现在已是成人——我曾外出，在广大世界中知道了留在家的亲属从不知道的人和地方。老头子克雷松仍在，他负责讨论会，他请我发表谈话。例如，我注意到《国家科学院院报》没发到数学图书馆，我发起一场运动，历经许多月，发出若干份备忘录，开了若干次会。（在那个年代，《国家科学院院报》对数学比现在重要。）我回来一年后又离开伊利诺伊，不久我们就胜利了。

那年没有很多别的事可说。我遇到一位演说专业的年轻女硕士生，她想要消除我的外国口音。她教我怎样念 r 时不卷舌，不过，在多数其他方面，她失败了。她获得过硕士学位。我继续作研究工作，但成果却只是一篇小小的论文。当时我还教几班课。

我教的课大部分是常规课，但是有一门现在还留在我心中。那一门课是线性代数，它的异常之处是只有两名学生，洪得马克（Hundertmark）和朗格巴特尔（Langebartel），给我留下了亲切的回忆。我对他们俩讲课仿佛面前有 20 名学生。我现在更懂得了，演讲总是个很笨的教学法，但是在那么小的一个班上，演讲是格外尴尬。我本可——我本当——想方设法逗引他们说

话，像苏格拉底的初级学生那样，几乎肯定，我在更有效率地灌输持久的思想方面会做得更为成功。活到老，学到老。

会 议

一步一步，我逐渐成为美国和世界的数学家族中的一员。美国数学会经常在哥伦比亚开会，我养成了参加会议的习惯。我遇见过莱昂·柯恩（Leon Cohen）[他后来成为NSF[①]先生（那位给钱的人）]、拉尔夫·帕默·阿格纽（Ralph Palmer Agnew）（康乃尔的系主任）、诺伯特·维纳及其他许多人。我开始感觉自己像一个局内人了。起初安布罗斯和我害怕维纳——一个矮胖子，留山羊胡子，带厚眼镜，名声显赫——所以我们很迟疑地去接近他。然而，尽管他外表上大声咆哮，却极不稳重，他想谈话，他想告诉我们他所思考的数学（他不善讲解出了名，他以为把他那优美深刻的思想讲得清楚而严谨的方法就是给那些思想加上一大堆积分号）；他想跟我们谈他会的那些语言（德语、俄语、西班牙语，而且他天真地相信，他会一种汉语——但是在中国餐馆，他尽力卖弄，服务员却不知道维纳讲的是汉语），而且他总问我们他做得如何（"你们觉得怎样？我出了错吗？我就是证明……——这对于一个老人说就不算太坏，是不是？"）。

美国数学会每年有两次大会——圣诞节大会和夏季大会。在过去40年当中开的80次大会，我参加了至少60次。不——大概是70次。不错，你在大会上学到了数学，但主要的是你得到了在会餐时非正式地遇到一些人的机会，彼此交换模糊但有

① National Science Foundation（国家科学基金）的缩写。——译者注

前途的思想（而不是听琢磨得无法理解的精密思想）。你可能知道一些定理和证明，但是更重要的是，你听到了有趣的猜想，你可以得到对你自己的不明确想法的反应，你可以得到有用的参考材料。还有，而且这是极其重要的，你可与他们建立个人联系。你可以给一个生人写信，问他一个观念的历史，或请他提（意见和）建议，但是给你遇到的人写信要容易、愉快、有效得多。

夏季大会通常在一所大学内举行。你可以睡在宿舍里，在学生自助食堂吃饭，在教堂中出席会议。冬季大会以往在圣诞节至元旦的一周内举行；如今是在一月份，因此人们不再咕哝自己的家族假期被破坏，而可能咕哝他们不得不缺课，或找代课教师。冬季大会花费较多（大旅馆），较容易到达（大城市），但不方便（会议在特别的会议室举行，演讲者必须使用一块摇摇晃晃的便携式黑板，再不然使用那种叫顶上映画器的伟大的现代发明，这种装置有一天大概会造得完善的。）

除演讲和啤酒以外，大会上还进行什么？回答："数学会"（和"美国数学会"以及几个别的附属组织）的轮子在传统的满屋子是烟气的后室内（现在不是那么满屋子烟气了）不停滚动。安排大会本身就是一件冗长的、复杂的、花费大的行政工作：交通、会议室、旅馆房间、电话、简讯、出售的书籍——样样必须事先想到、备齐。会议和出版物——这是任何学术团体的两大产物。杂志和书籍的出版，是更难的工作，比安排会议更费时费钱。你来到大会要见的、但又找不到的人也许来了，但是见不到。他们正在某个拥挤的小房间里，尽力计算明年他们能出版多少页会议记录，需要一个多大的编辑组，谁属于编辑组，到哪里能找到一个印刷厂，工作质量好而价格不高。

在锡拉丘兹教书

1943年，特德·马丁（Ted Martin）成为锡拉丘兹大学数学系主任，他提出聘我为助理教授（我认为这是级别的一大提升——像是军校学员提升为正式军官）并慷慨提薪（3000美元）。我应当接受吗？大概不会，可是我接受了。我们谈判了细节问题，可是我甚至没把此事告诉柯伯尔，不然他会劝我留下。我给马丁的最后电报说“阿基米得万岁”。

我一向是个不知足的人——新的总是显得比熟悉的更可取——但是从明智的观点看，这次调动是不智之举。伊利诺伊是相当好的大学，锡拉丘兹是相当坏的大学。在锡拉丘兹，哲学教授和拉丁文教授决不是专诚的学者，而天文学系之薄弱则令人痛心——像这样的薄弱将影响整个大学。有人也许说只要数学系好，谁在乎天文学家们无用——但那样是不行的。这几乎像是说“是船的你那头漏了，不是我这头”。这大学中集体精神低下，而且数学系中集体精神也低下。

马丁任命的头4位是李普曼·贝尔斯(Lipman Bers)、阿贝·盖尔巴特（Abe Gelbart)、汉斯·萨默尔森和我。我们都年轻而热情，我们费许多时间攀登数学高峰。困难有一部分是新旧的冲突。汉斯性情温和、举止文静、说话柔和、彬彬有礼，但是李帕（即贝尔斯）和我则是急躁、喧闹，精力充沛但是欠老练。老警卫员们年年待在那里，他们并不欣赏因我们的存在而带来的生活变化。规矩正在中途改变，但我想他们已被看成二等公民。这种感情不会提高士气，加强同志关系。

马丁努力工作，来建立一个很好的数学系。他终于使锡拉丘兹在数学界占有一席之地。人们只记得在锡拉丘兹曾有许多



W·T·马丁，1960年

优秀数学家——但是他们忘记在任何一个时期，只有这许多人中少数几个人。那是流动性很强的时代，优秀人物［如勒夫纳(Löwner)、保罗·罗森布鲁姆(Paul Rosenbloom)、舍弗雷(Scheffé)和福克斯(Fox)］不断来来往往，但他一般总能找到好的人选来替代离开的人。这是马丁的一部分管理天才。

我不喜欢那里的气候(极恶劣，昏暗、寒冷，漫长的冬季似乎在12个月中占去8个月)，我也不喜欢那里的市区(太小，容纳不下像芝加哥那样的大都会所拥有的便利设备、商店、餐馆、戏院；然而又太大，缺少像尚巴涅—乌尔巴那样的大学城所具有的魅力和学术氛围)。在这所大学教书令人相当灰心丧气。我没有统计材料可作证，但是主观上我记得这里的学生比伊利诺伊差得多。风传家长们发火要求给他们的孩子及格分：

“要记住，你们的收入靠着我们”。有些学生你不能说服他们不这样作加法：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$。我不时遇上一个好学生，我就很难再记住我的收入是从哪儿来的——我的良心使我建议他去宾夕法尼亚或密歇根。

并不是人人都这样玩世不恭。举一个极好的实例。有一位上年纪的学校女教师是马丁在某处发现的，她和其他像她那样的人一道，暂时加入教师行列——他拼命要把富于同情心的人派到各班。在她任职第一学期终了，马丁检查她的评分等级报告时（他按成规检查各班的评分报告），他感到惊讶和焦虑，原来是他注意到她的34名学生中有16名得A，13名得B，下余5名得C——没有D和F。他怀疑其中有错，又看了系里统一大考她给的评分——果然那些评分等级和课程评分等级一致。她太温和、太好心吗？马丁去找她谈话，她拿记分册给他瞧：家庭作业分数和课上考试分数都很高。他要求看期末大考考卷，发现评分正确——学生们理当得高分。

怎么回事？这一班学生不是特别挑选出来的，偶然把那些半天才聚在一起组成一个班，这种可能性也可以排除，这是有把握的。除了管理工作的责任感，这也吸引了马丁的好奇心，于是他详细询问了这位老太太。她态度谦恭，一点一滴勉强叙述了她的经历。她是个寡妇，她别无他事可做，她爱教书，她爱她的学生。她给他们额外上了多次辅导课，她鼓励他们在她的全天办公时间内去请教她，她约请他们分小批到她的套房去喝晚间热巧克力。她详细批改所有的家庭作业卷子，讲解他们做错的地方，他们应该怎么做，为什么必须评这个分数。他们旷课时，她尽力在课外同他们取得联系——“你身体好吗?，你没病，是吧？你需要不需要什么?”他们敬爱她，他们为她而努力

用功。在学期末了，他们全班联合行动，送她两打玫瑰花——没一个人得D或F。

战争正在进行，肉、黄油、糖、衣服和汽油难弄到；即便有配给，你也得排队去买；大家低声说着黑市交易。尽管如此，我认识的人没一个缺少东西——货物倒有，但是分配制度失败了。例如，有的商店一天只卖一小时的香烟，一到时候，队形成得很快，你还来不及跑到队尾人就站满了。我不再能一次买到一条香烟——我得每天排队，有时一天排两次。我烟抽得很多，至少和战前一样多，可是我从不缺烟——烟卷倒有，只是难得。

确实，我的香烟问题由于我的ASTP班而得以大大缓解。ASTP代表"军队特别训练计划"，通称ASTP计划。我教几个ASTP班，大多数班和平民班没有很大差别。当然，小伙子们身着军装，他们列队行进来上课，一面唱着歌，他们遵照命令，我进屋时他们起立。我告诉他们，我们在一起上课，可以采取这两种态度中的一种：或者我是一名荣誉军官，或者你们这帮人是荣誉平民——你们选择哪一样？这话惊动了他们，希望我不是魔鬼化身——反过来，这也解决了我的香烟问题。士兵们可以在特供点买他想要的全部香烟，也便宜，我班上不吸烟的人很愿意不时买一条再转卖给我。

在我的教学生涯中最引起争议的是指派我教的一门ASTP课程。这是一次教育方面的挑战。而不是知识方面的挑战。这是门高级课程，是一位军事行政官的精神产品。

问题是有许多士兵，聪明的士兵，受过良好的教育，有大学学位和别的资格，接近满足各种专家的条件，但尚未完全达到。一个机械工程师很可能缺少军队课程认为不可少的一门语言课程，或者也许是一名化学家数学知识不够。解决办法：把

这些人送到大学去读一两个学期的 ASTP 课程，让他补足所缺的东西。不过，让工程师学俄语，教化学家学微积分，未免太复杂了，简单的解决办法是教每个人学每件事。

聪明而受过完美教育的士兵分成班级大小的排（我有大约 30 人），然后学几门科目的速成课程。我可以描述一下数学课程。我的一些学生曾经是数学助教，曾教过他们现在要听我讲的同样东西；另一些学生是学语言学的，他们仅有的知识就是知道 Trigonometry（三角学）这个词来自希腊语。我教这样成分不同的学生学的课程每周上课 5 天，每天上课 2 小时。教学大纲要求在一个学期内学代数、三角、解析几何和微积分。最常听到的（学生和教师双方面的）抱怨，是有关课程的进度。学生们赌气说如果谁的铅笔掉在地上，弯腰再检起来，他就错过了解析几何。

在锡拉丘兹的研究工作

在马丁以前，锡拉丘兹的数学系开的研究生课程很少，仅够授予平常的硕士学位。我们抱有希望和雄心，要开展培养博士的计划，因此我们开始教一些稍高等的东西。我的一个实变函数论班，有两名学生：托密·奥尔巴赫（Tommy Aulbach）（早亡）和查克·泰图斯（Chuck Titus）（后来成为我在密歇根的同事）。他们是好学生，我们的一些硕士生没有那么好。我记得给一个学生进行口试，一开始问他雅可比行列式。结果表明这个太难了——其中包含偏微商——于是我们退一步问他一个变数的函数。这也不行，所以我们退回到两个变数但是把函数做成线性函数，——换句话说，我们是问关于 2×2 矩阵的问题。不行，还是太难——出了个二次方程式，可是完成平方的

作法是无法克服的障碍。我们所提的最后问题是关于指数为 2 的二项式定理。这位考生的确得到了他的学位，但不是在那时，而是在一个学期之后。

我们试办一两个研究班，还有那种普通的讨论会，但是我们没有足够的人力。马丁的四位被任命人至少有三种不同的数学背景和关心点，因而不容易找到对我们大家都有吸引力的研究班主题。马丁本人也来了，尽管行政工作正使他迅速成为一名前数学家。

我们总在忙，我们也喜欢这样。我的教学在几个战时学期是每周 18 小时。然而，虽然我正式隶属于锡拉丘兹只有 3 年时间，我发表的论文仍有 8 篇把锡拉丘兹列为我的地址。当时我每周的教学时间必定有 36 小时。

我的研究几乎全是在遍历理论方面，在锡拉丘兹时代发表的论文中有三两篇可算是我不感惭愧的论文。其中有一篇，我引人并研究了所有作用在一个固定测度空间上的保测变换的集合中的拓扑，并运用这种概念证明了伯克霍夫猜想的一种形式。这个猜想是，在某种意义上，遍历情况是一般情况，奥克斯托比（Oxtoby）和乌拉姆就保测同胚研究了这个问题，按拜尔范畴的意义解释“一般情况”，证明伯克霍夫是对的。我研究了更多的变换，因此我必须研究一种新的更一般的拓扑，证明伯克霍夫在那种意义上也是对的。

故事没有到此为止，在另一篇锡拉丘兹时代的论文中，我研究了混合变换的集合，这个集合比遍历变换的集合小得多——有幸能证明甚至较小的集合也很大——伯克霍夫之正确超过他的自知。我的论文标题是“一般而言保测变换的测度为混合测度”，它发表在 1944 年的英文“年刊”上。1948 年罗赫林（Rohlin）发表了一篇论文，标题为“一个‘一般的’保测变换

不是混合测度”——他是对的。我也对。他是开一个无害的玩笑。“混合”这个概念可以有两种，弱的混合和强的混合。我证明，弱混合形成大集合，但是罗林证明强混合形成小集合。

我将提到的最后一篇锡拉丘兹时期的论文不是一篇研究性论文而是一篇说明性论文。40年代初期《月刊》的编辑是莱斯特·福特（Lester Ford）（是父亲，不是儿子）。他的编辑思想有一点是刊载一系列的“……是什么”论文：“解析函数是什么”，“随机过程是什么”，等等。由于我急切想传播关于概率即测度这一新见解的说法，而且我当然也极愿意把自己和撰写“……是什么”的人的大名联系在一起，因此我写了一篇“概率是什么”的论文寄给福特投稿。他的答复来得很快，却是否定的——抱歉“……是什么”系列只限于特约稿。不过，如果我坚持要投稿，可以用别的标题重投此稿，碰碰运气。我照此办了，新标题为“概率基础。”

投稿以前我请几个人读过这篇论文；甚至在静电复印时代，这种作法也很常见。赫伯·罗宾斯读后反对我使用口语缩写。他说，我不可说“it isn't stretching a point too far……”（这不是过分曲解一个论点）；我必须说“it is not stretching……”。这话惹得我心烦，几乎令我恼怒。我不想更改。

为什么不改？我坚决认为，说明性文字不应当偏离当前认可的标准英语，在这种文字中，甚至双关语及其他幽默话，当然还有粗俗野话，都很不合适。为什么呢？因为这些话都不相干，分散心思，妨碍清楚接受信息。说明性文字在内容上和形式上不可拉杂，当然也不可造成误解；它必须严肃、正确而清楚。不过在这种准则下，说明性文字应当以活生生的口语文体来写，它应当像诗一样唤起人内在的思想，它不应沉闷，而应亲切、不拘束。文字的目的是交流，文体是交流的工具。选择

文体，要使得读者感到轻松自在，使他像作者一样，觉得所谈的问题很容易。

我谈交流，我要强调我刚才用的一个说法。造成误解的话和假话有区别。你努力追求“清楚接受信息”，有时候就允许你撒点谎，但是你决不可造成误解。

我最爱举的一个实例是，你如何对外星来的一位聪明却无知的访客解释英国政体。如果你说“英国是君主国”，你说的是实话，但是你指向了错误方向，你造成误解。如果你说“英国是民主国”，你是在说谎，但是这个概括比实话要好。

再举一例。1979年，在复活节前的星期一，（在印第安纳大学中工会）午餐谈话时谈起邮件投递问题。我们的爱尔兰来客理查·蒂莫尼（Richard Timoney）问一个有关耶稣受难日的问题。那年的耶稣日是4月13日。理查问耶稣受难日是不是法定假日。有的人说那要看你在哪一州，有的人就它应当还是不应当是假日发表了自己的见解——大家轻松愉快地漫谈。一会儿有一位新人加入这一群，问我们在谈什么。理查（Richard）说：“我们想弄清4月13日是不是假日。”那天在下午茶点时我对麦克斯·佐恩叙述了这次谈话及理查的回答。麦克斯大吃一惊，“可这是谎话呀！”，他说。麦克斯的意思是什么，我要说的是什么，这都清楚吗？不错，严格说我们想弄清4月13日是不是假日，但是这不是我们所谈的事；由于弄错了，或只是为开玩笑，理查发出的是造成误解的信息。

在交流中，例如在演讲中，重要的不是演讲人传出什么信息而是听讲人收到什么信息。演讲的艺术一部分是知道何时和如何说假话。不要懦弱胆小，死守陈规，坚持这样来保护自己，而是要领导听众把握真理。

所有这些话都是从我叙述赫伯·罗宾斯对“概率基础”提

出的改正说起的。未改正的论文被接受出版，两年后它被授予奖励说明性数学著作的“舒夫内（Chauvenet）奖”。我不禁（只对我自己）说：“呸，去你的吧，赫伯·罗宾斯。”

辐射实验室

科学家们正在许多条战线上作战。最著名的是洛斯阿拉莫斯（称香格里拉，一半是作代号，一半是说着好玩），但是也还有橡树岭、芝加哥“冶金学实验室”及其他许多战线。理论上，即使这些战线的存在也是机密，但事实上“人人”（这实在是指物理学家和数学家当中几百人）都知道。爱多什在某个意义上是一名敌国外侨，他有一天同一群物理学家吃便餐，一句话问得他们忧心忡忡。“你们根据原子裂变原理造的炸弹——造得了吗？”他想知道。

数学家们的秘密武器是那几个应用数学组。像麦克莱恩（Mac Lane）和卡普兰斯基这样的人，在应用数学组C组（C代表哥伦比亚），斯提凡·贝格曼（Stefan Bergman）和威尔·费勒在应用数学组B组（B：布朗）。后者由“院长”理查孙（R. G. D. Richardson）铁腕管理。院长授予研究员职位，意在把我们纯数学家中一些人翻新改造，使我们成为应用数学家。我得到的300美元足以供我在普罗维登斯度过一个愉快的夏季（1944），听费勒讲逼近论。

我和战争数学的重要联系，始自1944年后期鲍伯·斯罗尔（Bob Thrall）来的一次电话。他问我愿不愿意参加他所在的辐射实验室小组。在什么地方？在麻州坎布里奇辐射实验室。什么时候？现在，尽快来。

我曾听说辐射实验室，它的目的是研制雷达。斯罗尔负责

的小组研究机载雷达的可能性。他没告诉我，我能做什么，将做什么，但是他运用他的全部说服力要我相信我应当做这件工作：工作很重要，问题很有趣，坎布里奇满足活跃的数学家，报酬优厚，也就是说我必须去。他的一些理由对我有吸引力，但是我抗议时间安排。至少说，我想要教完这一学期，不想就放弃我教的各班；此外，我得向特德请假，我需要时间做通常的个人安排。好了——我们同意；不管是假日或不是假日，有遗留事务或没有遗留事务，我都要在 1945 年 1 月 1 日清早到场，至少呆一两个小时，签到，核实我的名字列在了辐射实验室 1 月份的工资单上。

我参加 91.5 小组时，这个组很小，它包括鲍伯·斯罗尔、汤姆·劳伦斯（Tom Lawrence）、他的指挥二把手、一位秘书、三四个女青年做实际工作（电影测量和计算）。这个组始终没有扩大，但是在我离开以前，“研究”人员增加为 6 人，办事人员 8 人至 10 人不等。

给我的第一项工作开始是由大厅那一边某个邻组来的一个问题。问题是要对付炸弹从飞机上投下来。已知有关时间和高度的某些数据，问题是确定炸弹在什么地方击中地面。稍加思索即可看出解答可以由毕达哥拉斯定理找到。我写出公式，并且（用尚未通用的语言）写出计算程序。这就是：在一页便条纸上写出 $Q=\sqrt{c^2-b^2}$，然后在一张看来比较正式的纸上我写出“1 列自乘，2 列自乘，相减，求平方根”。秘书打出我的指令，一个女孩子着手工作：她把 10 来个数据填人 1 列和 2 列，按照指令告诉她的做法敲计算机的键，然后在 3 列中写出答案。秘书打出报告（半页），然后在上面盖上“机密”字样。

这件工作是特殊工作，主要是叫我负责计算机。我们的原始数据是在胶片带上。照片是在一架尾随靶机的有雷达装备的

飞机中拍摄的。一件典型工作是校准雷达装备。也就是说：工作人员测量靶机出现在我们屏幕上的翼展，然后利用比毕达哥拉斯定理深得多的一个以三角学为依据的程序，他们就算出靶机离实际雷达机多远。实际距离可以与雷达飞机得出的距离数字相比较——这就是你的校准。

我们所做的事有好多是为提供就业机会而安排的工作中细微无价值的活儿。我们有一些投影机和一些计算器，工作人员用惯了这些东西；我们设法寻找能利用我们的专门知识的别的组，以提高我们在辐射实验室内部的地位。我们也有研究人员，我们寻找需要研究人员的数学疗法的小组。(辐射实验室有别的数学家小组，但是他们实在是已有足够的事可做。)

我们的确做了点事，结果我得到少量、很少量作应用数学顾问的经验。我的经验给了我两点教训。第一，顾问的工作一大部分是进行心理疗法；第二，不论你做什么，别解决人家问你的问题。至于第一点，别人问我的问题我不仅不可能找到答案——我甚至不懂问题里的词句。我耐心地坐着，听委托人(顾客？患者?)讲话，如果我真的弄迷糊了，就要求解释。我决不说什么，但是我不断地问：这个和那个有关系吗?，这个组份是小的还是大的？一个来钟头过去了，委托人站起来要走，一谢再谢我给他的帮助。他并不是故作礼貌。后来我从第三者听说，他用真正热烈的词句来叙述我的“帮助”。我的帮助是心理治疗。我愿意听，愿意表同情，愿意耐心等待提问题的人组织他的思想，解释他的问题。

至于解决向你提出的问题：100 次中有 99 次肯定是错误的作法。我的一位委托人有一个完全明确的数学问题要问我，他为面谈作了准备，把他的困难全归结为一个关于矩阵的定理。那么这倒是我能处理的事。花 10 分钟以至 15 分钟彻底了解这问

题，用半小时从工具箱中摸索找到适当技术，问题就解决了。答案是否定的，我给委托人一个 3×3 矩阵的反例。他神色悲哀，说声谢谢，就走了。

等到几个星斯后我才知道我是多么愚蠢。我在自助餐馆里碰到他，他快活地乐着，对我说他的问题的答案到底还是肯定的，并不是那个矩阵问题——不是，那根本是个错问题(!)——，而是他如果实在想作只要用初等微积分就可以作出来。教训：不要回答委托人的问题，而要帮他以简短清楚的形式提出问题。我觉得大多数真正的应用数学问题，难人的地方并不在于找到可得出答案的技巧，而在于找到适合问题的疑问。

就我作为应用数学家所得的微单经验来说，我从不需要力量强大的数学：有一点微积分，极少量线性代数，和大量三角知识，已足够让我作很多事了。

辐射实验室我的一些朋友对付分类材料有困难。从那时以来，我多次听到一个传言，其中姓名和地点各异。据此传说，有一批辐射实验室的数学家在数学上碰壁，他们根本不能解决正在研究的问题，他们得先知道答案才行。不错，波士顿有一位专家，但是他对秘密工作并不清楚，他似乎是唯一能帮他们的人，但是决不可请问他。除非——且慢！——我们不可以……？——对，我们可以！他们已经下的功夫不会白费；他们认识到，他们需要做的也就是拿他们转弯抹角地得出的一个提法——费几个月工夫才得到的——去问专家这个。重定的提法中看不出分类的情报，甚至原来的数学问题再也看不出来了——费大量脑力、大量时间、大量工作才找到改定的提法，从中谁也不能知道他们原来弄的是什么。（敌人有时急于知道的，不仅是你所知道的事，而且是你想知道的事。）

做了安排，订好约会，到时把改述的问题交给专家。他注

意听着，显得很有兴趣，他作笔记，他说他要思考这个问题。问题棘手——他一天没得出答案，他一个星期也没得出答案。他10天后真的得出答案，他打电话来，很兴奋——我得到答案了。我的朋友们挤在一辆汽车里驶到他的办公室，他马上就讲开了。你们看，你们要做的也就是——这个他做了：他巧妙地改换变数，他变换了问题，他作了简化——末了提出他的解决办法。这"解决"就是我的朋友们遇上的原问题。靠专家的才能，他得出这两个问题等价的结论比他们快些，而且从他的专门眼光看来，这种相等是一件很美的事实——迈进一大步——问题的解决！

我到坎布里奇刚过四个月后，1945年春季的一天我在哈佛广场外一家小餐馆吃午饭。收音机里嘁嘁喳喳地讲着话，可是几乎谁也不去听它。突然，大家寂静下来，那样奇妙地寂静下来，仿佛沉默的力量横扫人群似的。电台播音员的话音又悲哀又沙哑：总统刚死了。不到一个月后德国投降。大家欢乐、喧闹、痛饮，庆祝VE日（欧洲胜利日）——波士顿市中心区成为一个巨大的欢庆盛会。

我厌恶"91．5"，我也根本不相信我对打赢对日战争出了力。泰德·马丁希望我秋季回到锡拉丘兹，于是夏初我就开始进行脱离辐射实验室的缓慢程序。8月初的一天，我从一个办公室到一个办公室去领取我的最后准辞文件——那是8月6日，星期一——在广岛投下原子弹的消息传开的那一天。在我的文件上盖章的那些职员瞧着我，面带惊奇和嘲弄怀疑的神色——我的辞职恰是时候，究竟是我事先得到了什么秘密消息？

评审员和评论

我在辐实验室不必在考勤器上按键，但是不言而喻我们所

有人，科学干部和职员，都是真正的全日工作——每周48小时。再加上一些家务杂事，尽管大多时候在外面吃饭，除工作、吃饭、睡觉外没有很多时间做什么事了——研究几乎是完全谈不上。即使我有时间，我也没有精力和适当心情。我得有个宁静的星期二，才好在星期三有机会进行研究——可是并没有宁静的星期二。

不过，在夜间和周末，零敲碎打，也做了点小研究，写了三两篇小论文。有一篇是关于统计学的。它是我一生当中在《数理统计学年刊》发表的三篇论文中的一篇。这篇论文是我自觉地有意写的——我心里有个念头：在某个意义上，思考"现实世界"是我（在辐射实验室）的义务，而统计学（即使对我说来它就是测度论的一个分支）要比函数空间上的拓扑更像现实世界。也许正是为这个理由，那篇论文，我在辐射实验室构思的那篇论文，是我三篇论文中最差的。再说，它是一篇没有定理的论文——或至少说没有以形式展现的定理。论文名叫"乱舍的救济金"，讨论在一个可数的无穷乞丐集合当中随便分发一磅砂金的问题。现实世界。

定理难以捉摸的时候，我可以做别的专业活动当作对良心的安慰：我开始越来越多做评审和评论的工作。

这不是奇妙的语言吗？为什么"评审"是指（匿名秘密地）鉴定送交发表的一篇论文或一本书，而"评论"却是指（署你的姓名公开地）鉴定最近出版的一篇论文或一本书？尤为奇怪的是，我刚才提到的这个词的学术用法有别于商业上的用法，这又是怎么回事呢？事实如此：一个出版商（秘密）求你给他考虑出版的一部手稿作一个评价，他说他要你评论它。总之，我开始评审论文，评论书籍，我成为《数学评论》几百位协作者之一员。

评审的目的何在？答曰：尽力确保好东西得以发表而让坏东西不能发表。MR①中的评论目的何在？答曰：扩大每位个别学者能得到的那一小部分文献范围。这两样都是困难而要负责的工作，但是我一开始做这种事便毫不畏惧——我很高兴受人的请求，于是热心投入这项工作。到目前，我在所有问题的所有方面都与数学出版事业有关系。我写过数学论文，评审过数学论文，写过对数学论文的评论，对数学论文我作出过编辑部的决定。（请谁做评审人呢？对评审人要有多少相信和信赖呢？接受或修改或退稿呢？）我写书，我“评论”书，我为“通报”和MR写书评（很不相同的工作），关于数学书我作出编辑部的决定。（这个领域重要吗？讲法适当吗？书有销路吗？）我不再急切接受询问，如果接受询问，我也比我40年前更加谨慎（而且诚惶诚恐）对待这件事。我不相信我因此就比当年做得好些，青年时代的热心和精力很可能比上了年纪的经验和智慧更有价值。

我认为第一次人家请我作评审人的时候，我出于本能就认识到评审人不必要保证论文正确，如果他认为论文不需要改写，他确实也不必去改写。哈代说一个数学研究著作要求发表时，关于这个著作有三个问题你一定要问：它正确吗？它新颖吗？它有趣吗？对，确实如此。如果我是评审人，如果我看到现在提出的东西是5年前发表的东西的一个特例，我就这样告诉有关的编辑和作者。但假如所得的结果只是略为熟悉，我又无法引用别的材料把它推翻，那怎么办呢？如果我看到定理2不正确，我能举出一个反例，那我就这样讲——肯定讲。但是，如果我只是不大相信定理2，也不理解提出的证明，又当如何？我说，

① *Mathematical Review*（《数学评论》）——译者注

没关系。评审人既不必保证论文正确，也不用证明它不正确。人家拿他当专家来请教，是要他提出看法——他应当“闻”这篇论文，他应当根据它气味的好坏建议接受或退稿。

我不大喜欢我这种说法。我的意思不是说评审人要作仓卒的判断，也不是说他可不读他评审的的论文。但我的确是说作者不应当把评审看成一种挑错儿的服务；不论评审人和编辑是什么意思，作者对论文的内容总要负责。如果一篇论文不能充分引起本领域专家的兴趣，使他相信气味很好，那它至少有一部分没做到它着手做的事。如果它发表了，这论文的大部分读者并不是专家，如果说评审人有困难，读者的困难会更多。

当然评审人和编辑也可能出错，他们也可能让个人感情和其他非专业因素影响他们的判断。对此我没有矫正办法——谁也没有。但细心的编辑能认出抱有偏见的评审人，那么就可以求助于旁人，而且在最坏的情况，退稿的论文可以再投另一份杂志。我相信总的说来审稿制度作用良好。

MR 的审稿制度起类似作用。至少对我来说，MR 的主要目的是给我讲我不知道的东西，让我不要设法了解我不想知道的东西，免得浪费时间。第一个目的很明显：除非查 MR，我怎能知道《林琴科学院院报》(*Atti Lincei*) 上刊登的一篇关于巴拿赫空间中单位球的有趣论文呢？个人决无办法浏览 MR 收到的一切杂志，即使他真收藏着所有这些杂志也无法读遍。MR 的反面目的几乎是同样有用：如果评论讲《成就》(*Uspehi*) 上的那篇似乎有意思的长文大部分集中讲讨论冯·诺伊曼代数，并不适用于我需要从中得到帮助的更一般的 C^* 代数，我尽可暂时跳过它去不看。

我为 MR 写稿时尽力记着这两个目的。我不必保证论文正确，我不必指出文中每一点瑕疵——我真必须做的是告诉我的

读者这篇论文论的是什么。如果我觉得写"作者证明了……"太倒胃口，我可以写"作者提出证明……，"或"作者阐明了……"，或简单地写"定理：……"。如果我确实知道作者的阐述不正确，或者我恰好知道有一份参考文献作者忽略了，我可以（其实我一定）这样说；但是我的指定任务不是要找毛病而是要报告事实。

尽力地把一份真实的报告写得有意思决无害处。记得有一次我打算在一篇评论里加一点增加趣味的话，没被允许。那篇论文是多罗茜·马哈兰（Dorothy Maharam）写的，是对抽象测度论的一个十分重要的贡献。它的测度不是定义在集合上而是定义在更一般的布尔代数的元素上，而其取值范围不是由正数组成的而是由某些抽象的等价类组成的。我原拟的第一句话是"作者讨论了无点[1]空间中无值的测度。"MR 的编者罗尔夫·鲍斯不让我用这句话，反对理由之一是不熟悉英语习惯用法的人，必须靠字典才能读懂英文的人，不会理解我是在逗趣。我失望了——我本是有意逗趣。

特别有一篇评论我初读时就很欣赏，从此一直深情地玩味它。评论是克利弗·楚斯代尔（Clifford Truesdell）写的，开头是这样："本文对琐细问题提出错误解法。不过，基本错误并不是新的。"（MR12，p. 561）。

现在用叙述我的职业信仰的两条原则来结束我对报告和评论的这些回忆。我开始作评审和评论时获得这两条原则，我作编辑后更坚信这两条原则。一条是：要成为布尔式的；另一条是：要果断。

评审人并不是对处理论文最后负责的人，但是的确负有责

[1] "无点的"（pointless）可译成"无意义的"；"无值的"（valueless）也可译成"无价值的"。——译者注

任的编辑在灰暗的真空中工作也不会有效。不错，不错，论文肯定有缺点，可它也有优点，你作为接受咨询的专家，优点全看到了。你说，什么事也不是非黑即白，有许多灰色区域。我说，不对，一千个不对。不论是灰色不是灰色，不论提出不提出修改意见，论文最终不是被接受就是不被接受在现正考虑发表它的那份杂志上发表。决定总要归结为是或否、正或负、黑或白——评审人的主要任务就是以一种坚定的布尔方式投他的一票——0 或是 1，在中间含糊其辞是没有意义的。

至于果断，我这里引用李特伍德的“零-无穷定律”。李特伍德说，他接到一封信、一个审稿请求或其他需要行动的任何事情时，他运用自知之明给它归类：这是或不是我最终要做的那种事吗？如果是，**现在**就做；若不是，那么**现在**就写一张明信片或拿起电话，说这不是那种事。待评判的论文压在桌上文件堆底下压上几个月并不会改善，而推迟拒绝这件工作的日子，你也不节省时间和精力。你不但惹恼编辑，刺伤已感悲痛的作者，而且你也浪费你的时间。除下悬在你头顶上方的剑吧。零或无穷。现在就做这工作或永远不做，或此或彼，**现在**就说你要哪个。

从锡拉丘兹到芝加哥

1945—1946 年这一年大部分时间我在锡拉丘兹大学教书，并考虑下一年的事。教学和研究都进行得很满意，特别是我写出并发表了一篇统计学论文（关于无偏估计，以后经常被在这方面工作的人所引用）。不过，本学年初特德·马丁告诉我们他

就要离开锡拉丘兹到MIT[①]去做系主任(将来他任此职多年,对MIT数学系的发展起了很大作用),对我来说那就表示我也不想待下去了。

战争刚结束后的时期是数学家的一个卖方市场。全国经济情况很好,大学不断扩展,大批学生来叩大学校门,许多人是受美军法案资助的学生。至于我,我不再是一个初出茅庐的人,我已有一些教学经验,我出过一本书,发表过几篇论文——不需要写成百封求职信了。我一向积极参加学术会议,跟J·R·克来因(他是美国数学会的秘书)略有些熟识,我在高等研究院待过三年,认识那里的大人物,以及别的几位有决策地位的重要人物,例如哈佛的马歇尔·斯通(Marshall Stone)和桑德斯·麦克雷恩。我断定,我需要做的只是写五六封平常信,说我希望换个地方,还有继续参加会议,好被人看见,不致把我淡忘。

现在我对那个时代了解得比较深了,在那个时代的生活期间倒不能看得那么清楚,但即便那时也可能有相当了解,足以作出一些正确预言。我预言我会接到"几份"聘书——结果我接到10份。我很想能记起这些聘书是从哪里寄来的,我现在所能肯定的只有斯沃思摩来的一份和芝加哥来的两份。

我一向羡慕斯沃思摩。我认识、也喜欢那位系主任阿诺德·德累斯顿(Arnold Dresden),一位快活有趣的荷兰圣诞老人。而且我注意到学院的名声,它是国内一所最好的大学本科学校。如去那里,就是选择了教学事业而不是研究事业(不全然是,而是主要是),就是要过一种和芝加哥生活很不同的生活。我有些心动。我觉得很不好选择,直到今天我仍然心里疑惑:我当初

① Massachusetts Institute of Technology(麻省理工学院)的缩写。——译者注

应该去斯沃思摩吗?

芝加哥发来两份聘书，这是左右两方不搭话的一个奇妙实例。

芝加哥自始一向是个头等好大学，它1931年以来的校长梅纳德·哈琴斯（Maynard Hutchins）使它开始走上平行式新颖教育轨道，同时保持它的高质量。它创立了当地称作的“学院”，拿亚里士多德、圣托马司·阿奎那的著作及其余的伟大著作当它的教学基础。学院的组织及其与大学其余部分的关系有些复杂。很粗略地说，学院是本科学院，而各“学部”是由研究生各系组成的 ——有一个“社科学部”，一个“人文学部”等。

数学（及大部分别的学科）分两个系：一个在适当学部的主任管理之下，一个在学院。吉恩·诺思罗普（Gene Northrop）（性情温和、举止文雅的人，蝴蝶领结，烟瘾大，霍治吉斯学院前院长）是学院数学系主任（数学系大约由6人组成），他和一位副主任来锡拉丘兹会见我。当然，我渴望给他们留下一个好印象，我请他们吃茶点，我也尽力显得和蔼可亲。后来我了解学院的这帮温和朋友爱喝很干的马丁尼酒胜过格雷伯爵佳酿。没关系——不久我就收到邀请参加学院数学系的电报。

同时，数学系，或者按正式说法——物理科学部数学系，正进行改组。在E·H·穆尔（Moore）的主持下它有过一般分析的黄金时代，后来在G·A·布里斯（Bliss）的主持下曾有过变分法的黄金时代，但是在布里斯时代末期它太专门化了，知识范围太狭隘了，名誉受到伤害。1945年，它有一位暂时行使职权的系主任E·P·莱恩（Lane），一位上年纪的微分几何学家。雷恩先生是一位南方的老派先生，他的数学时代已成过去，而且他非常保守。一些年轻的淘气鬼建议他聘请萨米·爱伦伯格（Sammy Eilenberg），当时他30出头，已经是地位确立，很有

名气。雷恩先生的回答是一句问话："爱伦伯格是谁？"他这样问。（顺便一提，萨米后来倒去了印第安纳大学，但是他只待了一年，然后转到哥伦比亚，待了35年左右。）

大学里各系教职员都提出要求，希望让他们系有自决权；他们应当有权决定他们跟谁一起工作，在谁下面工作，而不是由那帮无知的院长来决定。不错，这话听来满正确。但是一个系变坏了你怎么办？安德列・韦伊指出有一个对数定律在起作用：一流人物吸引别的一流人物，但是二流人物往往聘用三流者，而三流人物聘用五流者。如果一个院长或校长真正关心建设并维持一所高质量大学，那么他就不可允许二流的系拥有完全自决权，他必须运用他的行政权进行干预和整顿。这是院长和校长的一项正当职责。可惜的是那种低劣大学，教学和行政两方面人员大部分是二流者，这种大学注定要发散至负无穷。

芝加哥是幸运的。沃尔特・巴特基（Walter Bartky）是一位相当好的院长，而哈琴斯是一位很好的校长。当然，哈琴斯有缺点。许多人认为"学院"是他的一个轻率的、无法实行的、浪漫的设想，更多的人认为他不善于鉴别人。但是他富于想像力而且精力充沛，常常听取并实行好的建议。他和巴特基干涉数学系的事务，他们安排雷恩先生下来，邀请马歇尔・斯通（Marshall Stone）来接替他。

作为斯通提名的人，我不仅收到了"学院"的邀请，而且收到了"学部"主任的邀请。我费了一些时间才参透芝加哥来的不同电报的涵义。巴特基和诺斯罗普都不知道对方发的电报，后来他们（由我）知道了背后事实，都有些难为情。毫不妨事，我们最后都做了朋友，而我接受了芝加哥的工作——"学部"的工作，不是"学院"的工作。

第 二 部

学　者

第八章　一所伟大的大学

埃克哈特大楼

自打进研究生院之日起，我就一直想写一本书，一本了结所有关于测度理论的书。萨克斯（Saks）写的书极好，它的论述范围却不够全面，但它论及的某些内容确实也能赋以最新形式。勒贝格和波莱尔写的书是好的，但已很过时。哈恩（E・Hahn）和卡拉特奥多里（C. Carathéodory）写的关于实变函数的两本书有最好的资料，但测度和积分理论对于它们只是一大桶水中的一两小杯。我的使命是保证让全世界屏息等着的是一本现代版本的真经。

并非人人都同意这一点。“别浪费时间，”有人对我说：“乌拉姆（S. M. Ulam）正在写一本关于测度理论的书，而且罗宾斯（H. Robbins）也在这样做。”另一些人则鼓励我。早在1946年春（在芝加哥大学要我之前），马歇尔・斯通就写信支持我，建议我把书投给他行将编辑的一套新书中。那时我的书还只是眼前的一束微光，手中只有一小叠纸，上面潦草地写着一些一鳞半爪的想法（“包括概率论？”“一定要论述哈尔测度！”）。这种鼓励以及后来到手的芝加哥大学的工作正是我开干所必需

的。(乌拉姆和罗宾斯的书并未出版。)

锡拉丘兹大学的春季学期于1946年较早结束，我在5月1日拿到了最后一张工资支票。芝加哥大学的秋季学季要到10月1日前后才开始，因此要到11月才能得到第一张支票。对于一个年青的助理教授，6个月没有收入的夏季是拮据的，但我想我可以好好利用这段时间。我请求学校让我在那里度过这段时间，结果很美妙。他们为我提供了一间办公室，还租给我邻近学校区域的一个小房间，于是《测度论》开始成长。这不是故事的结束——书写完还有两年，而出版则又在一年半之后——但我将在稍后告诉你们情形如何。

9月份我搬至芝加哥，这就开始了我生命中在智力上和数学上最令人振奋和富有成果的阶段。

芝加哥大学的数学系是十来个系之一，同学院的数学系一起位于埃克哈特大楼里，这是一幢可爱的新哥特式建筑。它匀称整洁，走廊宽阔阴暗，办公室狭小不亮，前有网球场，后面则是一个舒适的绿色小园子。它位于一个建筑群中，当地人风趣地说，牛津大学的马格达琳学院模拟了这个建筑群的设计。只要打开窗户，两三个小时里窗台上就会积起一层黏黏的煤烟，这是密歇根湖那边哈蒙德-加里钢铁厂的产物。

校园缓缓融入海德园，那是一个令人愉快的老式居住区，是一个被脏乱的贫民区包围的四四方方的孤岛。两个区域隔开得很奇特，要不是情形那么悲惨，就会显得荒唐可笑。科塔奇-格罗夫大道曾经是、现在也还是海德园的西部边界，即使偶而到邻近来访的人也会马上注意到，东面的行人都是白人而另一面的行人都是黑人。除了习俗之外，没有什么东西不让人跨过这条大道，但通常没有人跨过去。那是20世纪40年代的情形，今天科塔奇-格罗夫大道以西、密特威街以南或55街以北的地区

是贫困区，主要住着黑人，但那种荒唐可笑的奇特分隔已成过去。（密特威街是一条笔直的大马路，有芝加哥宽大的街区那么宽，它有6条车道，4条人行道，有广阔平整碧绿的草坪，甚至还有专用的骑马道。）海德园现在就像许多别的中产阶级、中等富裕的社区一样，只要你负担得起，就可以住在那里。许多年青的教员（黑人或白人）是负担不起的。

那时芝加哥大学大多数教员住在海德园，文化和社交生活挺活跃。那里有一家书店（并非只有活页夹和会计101的必修课教科书），那里也有音乐会和演出，从家里踱上十分钟就到，而且你不会有那么多时间每次都去。如果你想有个伴，不管白天或夜晚，只要到斯坦威杂货铺，或者57街上的热带屋，或者53街上的消闲馆，你准能找得到。

海德园东部边界是密歇根湖边上的“外车道”——湖岸车道。55街尽头是一个小半岛，现在仍是可供大众游泳和晒日光浴的海滩。实际上密歇根湖和密特威街还有科哈奇-塔罗夫大道是自然的固定边界，它们在不断增添建筑的比林斯医院（芝加哥大学的一部分）侧翼的挤压下绷着。海德园边界中最短的固定部分在北边。那时似乎在47街或49街，里边的51街上有高雅的店铺和富丽堂皇的电影院，现在它可能在55街，在校园主区两个街区之内。

海德园这块飞地有大城市中一小片区域的各种方便和不便之处。乘效率挺高的电气火车花10分钟能抵达围绕住着几百万人的市中心的环路。不惜代价高昂，只要坚持，就可避免我们国家所有城市各种病菌的侵袭。我最近一次访问那里时，荫凉安静的街道边是可爱的老砖房，一座座的独家住宅。可是，有很多警车巡逻，10分钟内就有4辆警车缓缓驶过我身边。直通大学保安处的电话遍布校园四周。（它们怎么起作用？如果你遇

到有人拦路抢劫或试图非礼，赶紧跑到角落里，拿起电话，……然后会怎样？）

战争刚结束的那些年，情形不错，之后慢慢变坏，然后变得糟糕。我从未遭到过攻击或撬窃，但我认识的人中有十来人碰到过。在我过去的“好日子”里，当我开着门坐在办公室中时，有那么两三次，叫化子曾走近我，他们在街上转进转出，希望能迫使一些人给点钱。系里的公共活动室不得不上锁，我们被告知去洗手间时得关上办公室的门，因为丢失过打字机。

这是否意味着我说的是一种被包围的状态，只有好人穿着防弹背心在后面战斗和拼搏？似乎并非如此。城市在那里，而我们并不是生活在持续的妄想偏执状态之中。我们需要记得的只是行动要明智。午夜时分独自一人在阴暗的街道上徘徊，或者不锁好汽车，这些都是不明智的，明显是愚蠢的。

光荣时期

虽然我以前曾在芝加哥住过，但实际上我并不真正了解芝加哥大学。我住在靠近北边的地方，到环路有5公里，而芝加哥大学位于南面，离环路有11公里。在我上高中还有后来在厄巴纳上研究生院时（那时我偶而出席美国数学会的春季会议），我去过芝加哥大学几次，校园及其邻近地区是熟悉的，然而却是新的；因为过去走访时我还在环顾我的路，而现在我已是它的一部分，而且我确信自己位于世界之巅。

系秘书给了我一把钥匙，一把万能钥匙！它可打开埃克哈特大楼中所有的数学办公室。这是古老的高贵传统，给系里增添了许多同僚平等的气氛。我们都是学者，大家庭中的一员，我们相互尊重对方的隐私，但就像在一个家庭中那样，没有人愿

意封闭起来，拒人于千里之外，每个人的图书都对别人开放，如果我从图书馆借来一本杂志，你在任何时候都可以来查对文献，我不会大惊小怪；旁的大学的访问学者可以在某人的办公室里躲上几个小时。万能钥匙常被使用，但从未被瞎用，这是一个伟大的做法。

在我呆在芝加哥大学的前一两年，还有另一个令人愉快的老传统：每星期二午餐时在四边形俱乐部开系会。一边开会，一边喝汤、吃沙拉，中间还有三明治——那是愉快的、友好的、高效率的。随着我们的成长，四边形俱乐部的桌子变得太小，而我们必须听到的各种声音又变得太多了，可是我们这种自我管理的方式就像任何政府最好那样似的近于完美。当然，我们是人，有时会有不同意见，会有琐碎的争吵（某人花费系里的邮资太多，某人想要另一人的办公室），但总体上我们真正相互尊重。有一次我想找沃尔特·卢丁（Walter Rudin），而安德烈·韦伊想找格罗腾迪克（A. Grothendieck），情绪和声音都变得高亢起来。我们都没有找到想找的人，气氛转向较为平常的状态，也就较为平静。

数学系第 n+1 年的教学任务恰恰在第 n 年圣诞节前决定。全系人员集中在一个小小的讨论班房间里。安德烈·韦伊常常带一叠书刊和手稿来打发会议中一些无聊的时段；齐格蒙德（A·Zygmund）则看《纽约时报》，系主任在黑板上写下一定得开的课程的数目让我们来挑选，并让我们添加自己想开的课程。学校当局不设置任何障碍，新课程的名称和数目都是即兴决定的。按照传统，在场的年青人先说。当然会有一些互相冲突的愿望，但小小讨价还价一番，就会友好地解决。有人甚至在我到会之前就照顾到我的兴趣。我在上班的第一学期就得到了我应当挑选的课程目录：一门微积分导引，一门遍历理论中的研

究生课程。正常的数学工作量是每周6小时，通常包括一门初等课程，一门高等课程。

雷·巴纳德（Ray Barnard）是系里次年长者［最年长者是欧内斯特·莱恩（Ernest Lane）］，他是穆尔（E. H. Moore）的一般分析学的学生，不是搞研究的数学家。另一位过气的人物是里德（W. T. Reid）（甚至他太太都叫他W. T.），布利斯（G. A. Bliss）变分法学派的一员。我到系里一年后离职，所有其他的同事，年青的和不那么年青的，都是知名人物，并正在使自己在美国数学界更加知名的征途上前进。艾德里安·艾伯特（Adrian Albert）是代数学权威，劳伦斯·格雷夫斯（Lawrence Graves）是实分析学者。这两位是年长者，属于战前的老近卫军。在我去的第一年中，比较年青者中有欧文·卡普兰斯基（Irving Kaplansky）（他比我早一年到芝加哥大学，在那里呆了38年），凯利（《一般拓扑学》的作者J. L. Kelley，但除了他母亲外，人人都叫他Kelley），还有希林（O. F. G. Schilling）［一位代数学家，身材不瘦，非常聪明，可是过早耗尽了才智，带有很重的德国口音——他被称作奥托（Otto）］。

凯利只呆了一年，然而别的年青人来了（欧文·塞加尔（Irving Segal）和埃德·斯帕尼尔（Ed Spanier）），而且很久前就有4位早已闻名天下的卓越数学家（陈省身，麦克莱恩，韦伊，齐格蒙德）。由于他们在位，芝加哥大学数学系进入了光荣时期。

是什么造就一所伟大的大学？

一所伟大的大学意味着一个伟大的教授群体——这就是它的全部涵义。这个条件是必要而又充分的。学习微积分前必修

课程的教学，校园管理和文书服务，还有函授学院，这样一些外围事物是否确实同一所大学的伟大性毫不相干？是这样，这些东西与大学的伟大性无关，然而不知怎的，有着众望所归的博学的校长的伟大的大学，似乎仍要好好做一点这类事情。我坚定地相信纯粹责任制体系，如果客轮的服务员打碎一只杯子，那船长该负责。在芝加哥大学，打碎的杯子极少。

学院数学系的普通课程有点像"新数学"。它的中心是数学基本原理，它不断修订和改进，并由热衷的信奉者讲授。诺斯罗普是教祖，而信徒中有迈耶（Meyer）、普特南（Putnam）和沃斯朱普（Wirszup），还有许多别的信徒，老是在系里进进出出，但上述三位在系里呆了好几十年。集合论、布尔代数、公理系统、实数定义——可以说这些构成了数学课程的材料。原则上欢迎学院的教师偶尔教大学数学系的课程，反过来也一样。这样的交流确实有过，但并不多见。通常的分工是学院负责微积分前修课程而大学数学系负责其他数学课程。这是粗略说法，细节很复杂。而且也只有历史价值和好奇意义。重要的——也是很好的——是，不把大学新生扔给一帮乳臭未干的研究生或观念陈旧的庸碌之辈。他们的教师是探索一种思想的训练有素的数学家。有时他们中也有人嘲讽或打趣这种思想，但是他们对自己的学生和教学工作是严肃认真的。我认识几位学过"数学1"的大学生，日后成为了职业数学家；比这更加重要的是，以后成为语言学家，图书馆学家或律师的人比起当今那些被迫把微积分111当成必修课的商学院学生来，如果对于数学是什么以及数学家干些什么知道得多很多，那他们就总有机会去学习。

让我来举出有助于芝加哥大学成为伟大大学的两件小事例，它们与数学或学术没有直接关系。

有一次我去上课时发现我的学生在教室门前转来挤去，原来教室里被当班的清洁工塞满了水桶和湿拖把。我提出劝告，当然徒劳无功：同拖把争吵是赢不了的。上课告吹，我直冒怒火，写了封骂娘的信给设施部门的头。令我惊讶的是，他立即回信，大度地道了歉，并保证他会更仔细地检查清洁日程，使之今后一定不干扰上课。在任何别处我都从未遇到过这种态度。

还有一次纳吉（Sz. -Nagy）访问芝加哥大学，他走了几天后我给他寄去了酬金支票。出了问题：他正在美国作学术旅游，从一处到另一处，因此没有收到邮件。在预定回欧洲的前两天，他打电话问我为什么他没有收到支票。我按了紧急按钮——打电话给会计室的人，他的完全合作使我得以让纳吉高兴。真的，我被告知：有什么不可以？我们会开另一张支票，半小时内我们会把它专递到纳吉在纽约的地址，使得他能在离境前兑现；也不用为第一张支票操心，当你收回它时，只需通过学校邮递系统送还给我们。

怎样解释这种难得的态度？是私立大学与公立大学不同？是把学术工作作为大学之本的长期传统？是校长办公室下达的明确指令？不管哪一种，芝加哥大学拥有着它。

做研究的数学家和教师，会计师和工友，都对芝加哥大学的伟大作出了贡献，令人惊奇的是，附设分部、函授课程等也作出了贡献。在数学系负责这方面事务的是哈里·沙伊迪·埃弗雷特（Harry Scheildy Everett），许多人叫他“沙伊迪”。相对年轻的我，他是长者，他是学生成绩平均积分点的计算人，他是函授教师，他身上有许多东西是我的反抗传统旧习的性格所极力反对的，但是他忠于芝加哥大学，恪守它的传统，工作得极好。

他对我很友善。看来他乐于告诉我埃克哈特大楼的历史背



H·S·埃弗雷特，1952年

景和当前的运作方式。当我们这些自命不凡的毛头小伙子准备修一门新课程时，他常常会及时赶到。他规划、提供讲授函授学院课程的方式，对学生极有裨益。他认真地为他的函授数学班评定分数。每当他喜欢一篇书面作业时，他会面露笑容，在上面写上赞语；而当一篇书面作业达不到他的标准时，他会显得惋惜而非常不耐烦，当然圆脸就会拉长，脸上也会不放光彩。艾兹·辛格（Iz Singer）告诉我，他在服兵役时修了沙伊迪的函授课，而在他列举的上芝加哥大学的缘由中，沙伊迪的友善、鼓励和帮助位居首位。

教　学

对还是错：任何人只要确实懂得某些事物就能教这玩意？这个问题的两个方面都有牢固树立起来的常规看法，我也是如此。

部分困难在于逆命题（教某些你必须懂的东西）也明显成

立，而皈依这一逆命题的诱惑是不可抗拒的。然而这里面有更多的东西：如果某人像鲍勃·马丁（Bob Martin）那样懂得位势论，或者举更著名的例子，像诺伯特·维纳那样懂得傅里叶分析，为什么他不来告诉我们？为什么他不来教育我们？他不能这样做时可能发生什么？看来残酷的事实在于，某些人就是不善于把事情解释清楚，尽管清楚明白地显示出他们对所讨论的主题懂得比任何别人都要多。

我认识鲍勃·马丁，我认识诺伯特·维纳，我也认识许多像他们那样的人，因而我不能让这种自相矛盾的情形逃脱。然而我非常倾向于赞成说真懂的人就能教的这一方。我倾向于猜测，说维纳并不像几乎所有20年后写调和分析教科书的作者那样"真正"懂得他所做的事情是有点道理的。维纳内心体会到理想这个数学概念的重要性，但据我记得，他从未用过这个名词。他从未试图建立他用来导出激动人心的论断的强有力的分析技巧同能使这种技巧纳入透明清澈的背景中的广阔代数概念之间的联系。他想要了解，他也试着了解，但他对要试的是什么没有正确的想法。他设想这种试验意味着深人细节，多次写出许多二重积分之间的各种方程，迈着小步从一个前进到另一个。确实有时他对"小步"判断失误，但这不是他的主要问题，使他难于理解的是他没有描述什么东西"真正"在进行。他"真的"知道吗？我说并非如此。我要说他是一位天才，富有深邃的洞察力，能够"看见"其中的真理，但他没有广阔的视野，使他得以"知道"和"理解"真理。

无疑维纳"理解"三角学、解析几何和初等微积分，这是否意味着他是教这些科目的好老师？可惜不是。如果我的业余心理学正确，那么他和像他那样的人不能觉察这些平凡科目的连接细部，还有它们对绝大多数普通人的重要性，甚至还有它

们的美，就像一个赛跑者不能觉察他膝盖中神经和肌肉的细节一样。赛跑运动员知道这方面的某些事情，但径赛运动教练在某些意义上知道得更多；径赛运动教练“真正”理解它们，不像赛跑运动员，教练能进行教学。

当我开始回忆我在芝加哥大学的第一年教学时，这些想法浮现出来。现在我比那时老了30岁，而且已在伊利诺伊和锡拉丘兹（顺便也在普林斯顿和哈佛）教过书，然而我对教学的看法和教学技巧还没有达到最后形式。芝加哥大学的学生用功，兴趣十足，富有才华——并非所有学生都这样，但这样的学生多到足以使在那里教学成为智力上的挑战，成为令人激动和教学相长的经历，或为一种乐趣。我当时认为我已是一个很好的教师，但在芝加哥大学我努力工作，希望变成一个更好的教师。

每上一个班我要干的第一件事是尽快了解我的学生。我让他们坐在他们想坐的位置上，但要求他们每次坐同一位置，以便我能通过坐位图记得姓名和面貌之间的一一对应。尽管我是拙劣的艺术家，但我有时还是要在坐位图上画漫画——长头发，圆脸，牛角镜框，等等；有了宝丽来一次相机后，我就拍照，如果班上学生不是太多，我就让每位学生在学期最初两周内到我办公室呆上10分钟。在这10分钟里聊什么无关紧要，要紧的是见面结束时我知道了这些学生的某些情况（来自纽约，高中时学过微积分，想学物理，英语有困难，……），而学生也感到一位实在的活生生的教授正关怀着他们。

要理解一个科目，你就必须知道得比这个科目多；要教一门课程，你就必须比你可能放进该课程的题材知道得多得多。当我在芝加哥大学第一次教初等微积分时，关于微积分我知道的比要教的多。即使如此，我仍认为每堂课都认真准备是重要的，现在我仍然这样想。理由之一是学生们是可塑的，不管他们如

何反抗，总禁不住要受到讲课者权威的影响。如果你讲错了什么，他们会记住，将来对他们会导致损失。我特别竭力不故意说任何错误的东西（更加注意决不在黑板上写出错的东西）。我在伊利诺伊的一位统计学教师克拉索恩（Crathorne）有一次告诉我，为使学生重视“$0^0=1$”是一个合乎情理的定义而不是一条定理，他在班上说他也完全可以定义 0^0 是 7，而且在黑板上写下式子“$0^0=7$”。几年后他收到这个班上学生的一封信，信中说：“我的笔记上有 $0^0=7$，但我忘了您怎么证明的，请您再告诉我好吗？”

犯错误是另一回事。当然我上课时会犯错误，常常我在班上撞上一个问题，可是不知道如何解答。我很快发现试图蒙混过关是很坏的办法，很可能你会越陷越深，即使不是如此，几乎可以肯定学生会发觉你的所作所为。对于错误，我知道说：“哎哟，对不起，这是一个错误；我说的那点是错的，下面才是我应当说的”。对于我答不出的问题，我说：“让我想一下，试着去查一下，下次我会告诉你们结果。”

尽管我们力图避免错误和令人困惑的问题，但谁都知道它们有很大的教育意义。一位博学的老师会帮着这样的神话永久流传：数学是大量事实和完美技巧的坚固整体。学生常发现这个神话容易令人相信，却难以令人相处。亲眼看见一个专家犯错误或承认不知道，然后努力杀开一条血路找到答案，会使他们大开眼界。吉米·萨维奇（Jimmie Savage）告诉我一次在密歇根大学课堂上发生的事如何给他留下深刻印象。他问本·杜什尼克（Ben Dushnik）一个问题，听到的回答是：“萨维奇，我不知道，我从未想过这个问题，不过让我看看我们能否解出来。”然后他在黑板前大声边说边想，几分钟后他就用本学期课上教过的方法得到了答案。吉米从中得到了教益：可以用数学思维

来了解你以前并不知道的事物。

在承认错误与被难住之间，在其间的绝大部分时间里，我希望，我想，重要的是保证自己是对的，并让学生体会我有把握——我必须具有使人信服的勇气。即使像“这玩意儿重要吗？”“考试时会考吗？”“为什么您不直接代入h=0？”这样的问题，也应该干净利落地回答。我一定不能含糊其辞，犹豫不决。有时错误比模棱两可、惶惶不安更好些。

关于教学要说的事还要多得多（尽管任何地方不会像教育学院说得那么多），但除了写下我关于打分的想法外，我将就此搁下。评定班上学生的成绩是我工作的一部分，这是必不可少的罪过。打分不好，因为它常使学生过分重视分数，因为它常被人们认为比它可能达到的程度更精确，也常常因为它使学生厌恶。然而它又是必须的，因为按照现在的教育和社会组织系统，后修课程的教师得知道学生早先学得如何，而未来的雇主也要了解学生在干相应的工作时大概会好到怎样。我不能设想能设计一种学习和就业系统，其中不需要上述信息。

不过，我并不认为打出提供情况的分数就那么难。课程结束时，我通常已很清楚地知道某些学生懂得所学的内容（A），而有些人则不懂（F）。介于这两者之间，有些人懂一部分，但其理解有缺陷，可能缺陷较大（B），也可能有人能用某些内容但并未真正理解（C）。当然，也有一些学生，他们能证实自己接触到了这些内容，但肯定并未懂到足以使他们能修读高一级的课程（D）。（我发现就按我制订的标准对我的语言知识自我打分是有趣的。以下是我想我或许能得的分数：英文A，中文F，匈牙利文B，西班牙文C，俄文D。既然谈的是语言，我还可以进一步：德文C^-，法文D^+。）当然我“清楚地知道的”学生学习情况是主观看法，但值得注意的是事实证明这样的主观评分多

么近于一致：这些学生在不同课程从不同教师手里老是一次又一次获得同类分数。我不同意有些同事提倡的更加“客观的”数值评分体系：问题4占15分，答案正确得3分，在做出答案过程的6种明显错误步骤中，每犯一种扣2分。我认为，当我上完一门课后，关于学生学得如何运用我最好的判断是我的责任，任何别的做法都是逃避职责。

学生和访问学者

芝加哥大学的学生在公共活动室、小吃部或校园中到处热烈交谈，谈论的不是篮球或自行车比赛，而是圣·托马斯和伽利略和达尔文。真诚的、高水平的智识气氛吸引着潜在的天才，同时也吸引着冒牌货和怪物，但前者以及我们这些干活的人学会了同后者相处，甚至分享他们为生活增添的乐趣。

1946年秋季学季的生活特别激动人心，那是真正战后一年的开始。第一学年研究生标准课程复变函数论有95名学生，我破天荒第一次开的遍历理论研究生课程有38名学生。这些学生中有埃里特·毕晓普（Errett Bishop）、亨利·戴伊（Henry Dye）、哈利·弗兰德斯（Harley Flanders）和赫尔曼·鲁宾（Herman Rubin），而且至少还有六七个人日后在数学界受人尊重。在这个班上，我给了27个B，3个A。这些A给了毕晓普、戴伊、弗兰德斯和鲁宾中的三个人。

学生们喜欢使教学成为一种乐趣。说他们为学分而学习是不公平的，在芝加哥大学的教育体制下他们实质上是不会变化的，很难阻止他们用功学习。这里有一个例子，不见得很典型，但却能说明问题。有一次我布置了一道作业：在一个给定的特殊类型的无穷级数集合中找出两个级数，一个收敛，另一个发

散。毕晓普的家庭作业中包含着一条我以前从未见过的定理：所说类型级数收敛的必要充分条件是其通项趋于零。这个断言不难证明，但想出它却需要实实在在的数学理解力和胆量。（它成为我关于测度论的书中第19页的习题13。）我在毕晓普的作业上写了个大大的A字，并在分数下面写了“来找我”，为的是向他祝贺并更好地了解他。课后毕晓普留了下来，有点腼腆，然后又有点不太友好。“你说我得找您?”我花了一点时间使他消除隔阂，最后他成为我的博士生，我们成为挚友。从年代次序说，他是我的第四位博士生，在才能上不是第一就是第二——历史将决定是第一抑是第二。

当我教毕晓普那个班的遍历理论时，我开始使用一种评分系统，我发现此后它十分有用。我仍用A到F给定正式分数，但在我的私人记分簿上，我通过在学生姓名下写上两三个短语来“打分”——这些话能使我以后回想起他和他的工作质量。例如，在毕晓普姓名下，我写着“凌乱，有才智，有独创性；能啃难题”。同一班上的其他例子（隐去姓名）有“严肃，工作努力，没有天赋，扎扎实实”；“有点糊涂，过于随便”，“不聪明，勉强干活”；“讲话直截了当，懂得基本内容”，这些批注对我有很大作用。例如，很久后要我写一封关于某个学生的推荐信，我就利用它们，有时我的信中还有我给的文字“分数”。

除了优秀学生外，培育芝加哥大学振奋人心气氛的另一因素是邀请短期访问者的传统办法。老有新面孔出现，刚入门的年青人或卓有成就的长者，他们激励着新的想法。常留在我记忆中的访问学者有：伯格·詹森（Bφrge Jessen）、马赛尔·黎斯（Marcel Riesz）和皮埃尔·塞缪尔（Pierre Samuel），还有狄奥多涅（J. Dieudonné）、小平邦彦和李特伍德。加上前途似锦的小伙子，他们严格地充当短期讲师，决不超过两年，还有

许多人只呆一周或一天。

来芝加哥的访问学者水平都比我高，但其中有些更近于我的同龄人，他们特地用善意的玩笑来缩小我们之间在专业上的差距。詹森就是一个合适的例子，他的讲课特别清晰，组织得极好。我听他讲殆周期函数课程，他讲课的教室与我讲课的教室相同，时间正好在我讲完课后。有一天一位学生课后问我一个问题，使我来不及擦黑板。上课铃声一响，詹森走了进来，我坐下，他上去擦黑板。然而他注意到第二块黑板上从上到下大约三分之二处我写着“殆周期函数”。(我记得我用它作为一个大希尔伯特空间的例子。)除了那一处外，他擦去了黑板上写的所有东西，然后开讲，从黑板上角写起。大约35分钟后，他写到未擦去的地方，果不其然，那时恰恰用得上“殆周期函数”这个词。

马赛尔·黎斯身材矮小肥胖，食量很大，喜欢饮酒和社交聚会。戈尔丁(L. Gårding)说，当他在瑞典当黎斯的助教时，烈性酒是定量供应的，他的职责之一是把自己的酒类供应证转到黎斯名下。吃饱喝足，情绪欢快，这时马赛尔·黎斯就喜欢唱歌(用匈牙利语唱的的吉卜赛民歌)和谈论他的孙辈孩子。每当提及他们，他不会忘记让你知道他从未结过婚。他也喜欢谈论他的兄长弗雷德里克·黎斯(Frederic Riesz)。我的印象是，两人互相尊重，相处和睦，但不能完全避免同胞手足之间的竞争态度。弗雷德里克更为世人称道，马赛尔掩饰不了他的妒忌。竞争继续不断：泛函分析学者和“硬”分析学者总是争辩兄弟两人中谁对数学贡献更大。

我本来可能以为自己正在世界上出人头地，但像黎斯这样的访问学者使我很快端正了方向。他出现在埃克哈特大楼的第一天，我上前向他表示致意。我用匈牙利语作自我介绍，并欢迎他

来芝加哥。他说："Glad to see you, sonny"（"很高兴见你，小伙子"），——无论如何，这是美国口语中最接近于按匈牙利传统一个老人友善但带有优越感地同一个晚辈说话的方式——"现在你在这儿，请你替我记下来，好吗？……"，然后他开始口述一封信。我从助理教授升任秘书。我能怎样？我记下了这封信。

第九章　最初几年

古根海姆研究基金

我在芝加哥大学的第二年不是在芝加哥度过的。马歇尔·斯通建议我申请那年的古根海姆研究基金，而我获得了这项资助，我获得了它！在没有获得伊利诺伊大学的许多研究生奖学金（更不用说国家科学研究委员会的研究基金）以及没有得到讲师职位任命之后，在跳过了我觉得无意中获得的普林斯顿高等研究院一学期研究基金之后，我终于得到了某些实在的东西——我把它看作我所获得的首次正式赏识。

我在芝加哥大学1946年至1947年的工资是5 000美元，1947年至1948年内定的工资金额相同。每人每年提薪的惯例，即使在像芝加哥大学这样的好地方，也还没有出现；人们并未期望年年涨工资，物价也没有上涨到使年年涨薪成为必要。然而，古根海姆基金每年只给3 000美元。(顺便提一句，要知道所有这些人拿的都是12个月的收入，国家科学基金夏季薪俸还在遥远的未来。）这里芝加哥大学第一流的办事方法又起了作用。行政方面的花招是把我一年的工资（!）降低2 000美元，然后让我去高等研究院。我骄傲地告诉我所有的朋友，我是这个

国家中那一年里最廉价的助理教授。

申请古根海姆基金时说的目的是写一本关于测度论的书，而情况也正是如此。1946 年长夏我呆在高等研究院，这使该书有了个好的开头，自然希望在没有别的事情的整整一年中，在高等研究院所能提供的理想条件下，我能完成写作计划。它不是一个充满跌宕起伏使人惊出一身冷汗的悬念的惊险故事，除了平日正常的生活波折，写作时的细节早已忘掉，一切都平稳地进行，我写出了那本书。

高等研究院的生活就像我回忆的那样，给了我一向非常接近天空的小办公室，它称作阁楼或顶楼（然而是一个幽僻的地方），斜屋顶，老虎窗。全部陈设是一张书桌，一台打字机，还有一把让客人坐的椅子。

在我办公室之外，一切都在发展。40 年代早期，研究院的数学所大约有 25 个“成员”；1947 至 1948 学年则超过了 50 人。（“成员”是对这样一些人的自然称呼，他们既不是像教授或秘书这样的固定人员，也不是像助理这样的临时人员。）当然，数学所里有物理学家，例如保罗·狄拉克（Paul Dirac）和艾尔弗雷德·希尔德（Alfred Schild），但数学家人数远超过他们。爱因斯坦还在人员名单上，但他是荣誉退休教授。名单中别的物理学家有奥本海默（Oppenheimer）（教授）和布拉姆·佩斯（Bram Pais）（固定成员）。布拉姆并未呆很长时间。

关于爱因斯坦和我有一则无聊的故事，我喜欢它是因为它表明我当时名气怎么样。我曾在两三次公共的正式场合被介绍给爱因斯坦，然而不能说他认识我。那一年恩斯特·施特劳斯（Ernst Straus）是爱因斯的助手，恩斯特不是物理学家，但却是一个聪明的年轻人，高等研究院并不想短期用他。恩斯特的母语是德语，爱因斯坦助手的主要职责之一每天陪老人回家，边

走边用德语聊天。一天我妻子正好在他们快回家时走进富尔德大楼，她同恩斯特互相打招呼。恩斯特后来告诉我，爱因斯坦问他，“她是谁?”恩斯特答道：“哈尔莫斯的妻子”。爱因斯坦仔细想了一下，便问：“噢！那么哈尔莫斯是谁?”我的名气就是这样。

说到爱因斯坦就使我想起哥德尔。他们两人是朋友，哥德尔常取代施特劳斯陪爱因斯坦回家。大多数伟人身上都堆着某些传说，关于他们的这些故事可能是真的，也可能是想像出来的，被人传诵和美化，直到符合讲故事的人关于主人公性格的想法为止。哥德尔几乎是个例外，关于他没有什么故事，仅有的几则说的是他没有做的事。例如，他几乎没有什么社交活动。在极少几次职责使他不得不参加的午后茶会上，他很少同人说话，甚至达到避免同人接触的程度——他缩紧肩膀，在人群中迂回行进，就像一个高度警惕的人在田野里筋疲力竭地跑动。据说他老是被疑病症困扰，常有某些怪诞的想法，其中之一是暖气装置的油漆有毒，所以开启这该死的玩意就会招致灾难。人们告诉我的事中只有一件我还记得，就是他习惯于对日常事务使用他超精确的逻辑习惯。第二次世界大战开始时，他得回答一组设计得并不高明的官僚主义式问题，对着这些问题他困惑起来，而且困惑越来越大，他不是像我们大多数人那样用不耐烦的“是”或“否”回答那些无法答复的问题，而是写下长长的复杂的文章，解释道如果此问题意味着A，那么答复是Z，但如果它意味着B，那么……，如此等等。

高等研究院的数学生活充满生机。至少有半数访问者已是或即将著名于世。在我的好友中有两位来自印度的年轻人（他们那时还年轻）、梅纳克希孙德拉姆（Minakshisundaram）和查德拉塞克兰(Chandrasekharan)[后者同天体物理学家查德拉塞

克尔 (Chandrasekhar) 无关]。梅纳克希在回印度几年后即英年早逝；查德拉回到印度，然后离开孟买的塔塔高等研究院，去苏黎世的联邦综合工业大学执教。只是为了让人们对高等研究院访问者的水平和国际性有个印象，我要并非不经意地举出三位：华罗庚，丹·莫斯托夫 (Dan Mostow)，保罗·图兰 (Paul Turán)。

普林斯顿大学在高等研究院数学家的生活中仍有重要作用。在普林斯顿大学的学生中我有两位好友：诺尔曼·哈密顿 (Norman Hamilton)，那时十八九岁，还是一个大学生，由于不去上课，拉丁文不及格，但在数学研究生课程上很出色；奥斯卡·戈德曼 (Oscar Goldman)，那时年龄较大，二十一二岁，后来是宾夕法尼亚大学的系主任。这两位都是高等研究院区域内我所住的煤矿工房子的常客。至少我听到的说法是，当时高等研究院住宅区中的这座东倒西歪的木房子是为破产中的采矿业镇建造的，镇上的人后来飘泊到了普林斯顿。这些房子墙挨墙紧挤在一起，两层楼，大多数用底层的一座大腹黑煤炉取暖，生这些炉子可得有一点艺术，《纽约时报》中缝曾以它为议题，谈到很多点燃经验和耐性。十年后才有更加现代的有天花板辐射供暖设施的由建筑师设计的房子。

那一年日程排得很紧很丰富：讨论班，偶尔开车到纽约（通过新泽西气味难闻的工业区大约要一个小时），社交生活，还有测度论。到那一学年结束时，《测度论》这本书正好完成。春天的一个下午，在我的房子里要为某位访问学者举行一个聚会，但作为主人的本人则在最后到达的行列中（这是预先安排的）。进屋时我高兴、激动，骄傲地向大家宣布："我刚写完了《测度论》的最后一个字。"有人问"《测度论》最后一个字是什么"，我怔住了，因为我已忘了。什么也没有干，我赶快跑回办公室，

再快跑回来告诉大家，《测度论》最后一个字是“五”。

《测度论》

一个作者至少能有6次说“这本书已经完成”。一次是在他写完初稿时，另一次是他完成“定稿”时，那是经过修改和润色的可以送出请人审读的稿子。第三次是完成打印稿寄给出版社。下一次是在作者不得不做的最令人沮丧和恼火的工作——审改毛条校样之后。这位文字编辑指导排字工人时怎么那么蠢，那位排字工人又怎么能排得这么离奇，这么反复无常?!第五次就会是令人愉快的：分页校样是整洁的，这本书开始看起来像一本书了，而且这次校改完后，作者就没有事了。然而，一本书真正完成仅仅是在最后一次，就是出版社把装了封面的书邮寄给你的时候，那时在你手中才有了实实在在的东西来让你抱着掂量和欣赏。

1948年我离开普林斯顿回到芝加哥时，是在第一次意义下完成了《测度论》。在高等研究院我的接近天穹的办公室中，我不断敲打一台笨重的手工史密斯-科罗娜打字机（1948年有电子打字机吗？不在我预算之中，而且也没有这样的打字机），我自己打完了全书。由于我需要五个复写件，所以一定得敲打打字机。我在原件和五个薄光纸复写件上打字和填写，然后校对、装订（便于别人阅读），分送给四个人。（原件保留给出版社，另一复写件留在自己手中。）

对于高明的人物出书过程会有不同，但仍然会是原始的。当赫尔曼·外尔写作他关于代数数论的小书时，我正在普林斯顿。他的秘书告诉我写这本书的通常程序。外尔按粗略的随记口授给他，诸如：“数字（8.3），跳一行，组成一个整基，跳9格。

通过合取，跳一格，域 k，跳一格，变为 k 上的 f 次域 $\bar{k}$，跳一格……”。她把这些速记下来，再打印出来，然后外尔本人审阅打印稿，把公式补上。

当我的书达到校样阶段时，我已回到芝加哥。有几个学生修我开的一门研读课程，我让他们读的当然是我这本书的校样。他们都是聪明的学生，而且很认真。他们发现了许多排印错误和方向反了的不等式，数目大体同平常校样相同；这些东西令人讨厌，但还不是灾难性的，它们都在预料之中。然而他们发现了一个严重错误：一道习题满不在乎地陈述了一个错误的命题（几乎没有什么意义）并且要求读者加以证明。我的辩解是，相对于较早的手稿中的定义，该命题是有意义的，而且也是对的；我改换了处理方法和定义，那道习题仍然改正不了。我的辩解未能改进那是一个拙劣陈述的事实。当时这本书已处于分页清样阶段，这时如果你加减一行，印刷工就会大发脾气。如果我干脆删掉这道习题，编号系统就会乱套。解决办法：数下习题中符号、格子、句子、括号的数目（总数为 535），然后补上另一道习题，这道习题要涉及测度论中前几页论述的那么狭小的部分并且差不多需要 535 个符号。就数学写作而言，这可是我所曾面对的最奇特的边界条件。（顺便说一下，结果就是《测度论》第 142 页的习题 3，我的资料和记忆都未显示它所代替的那个谬误。）

出一本书的各种事务所需的时间总比你设想的要长，作为一个编辑，我常问作者他的书将于何时完成；如果他说 1995 年 1 月，那我就在日历上记上 1995 年 7 月更可能记上 1996 年 1 月，假如结果送到的实际日期是 1996 年 8 月，我也不会大吃一惊。同出版社打交道也一样。作为作者我常问要多久我就能拿到校样，如果告诉我 2 月，那我在日历上注上 4 月，要是在 6 月

收到，我也不会十分惊讶。《测度论》不例外。我想我应于1949年1月寄出稿子，实际寄出日期却晚了6个月；反过来，出版社答应我于“早秋”寄来校样，实际收到是在11月。“圣诞节之前”，出版社向我保证，“您将于圣诞节之前收到装订好的书”。书上印的出版日期是1950年，而我收到第一本书则在1月23日。

硕士考试

当马歇尔·斯通出任芝加哥大学数学系主任之职时，他为自己拟定的第一批任务之一，是设计一套高质量的研究生课程体系，他从我们中选拔几个人来帮助他搞定细节。搞出的名堂称作我系的硕士培养规划；对于别的许多大学，它就是博士候选人的合格证，它是令人印象深刻的包含12门课程的体系。这12门都是一学季课程，由于通常一学年由3个学季构成，所以它们相当于4门一学年课程，大多数学生要用3年念完，不过他们又不是3年制研究生院。在芝加哥大学，“研究生”的定义是模糊的；在用语上比较广泛接受的是，那3年包括大学生最后两年和研究生第一年。

这些课程中有3门几何学课程（包括射影几何学和微分几何学），有4门笼统地称为分析（集合论，一般拓扑学，实变函数论，复变函数论），还有代数学中的5门［从按照伯克霍夫(G. Birkhoff)和麦克莱恩方式阐述的可除性初等性质，到线性代数，群和环，最后以伽罗瓦理论结束］。它们都是内容丰富的不平常的课程，任何理解了这些课程的人都能踏入博士生阶段，不会有准备不足的麻烦。

领域限制在芝加哥大学比我去过的任何别的大学要松动。



M·H·斯通，1973年

如果一个分析学家想教一门代数课程，没有人会认为那是侵犯别人领地。倒是有相当多的互相交换。卡普兰斯基为他教过所有硕士生课程感到骄傲，我也想试一下，但没有全部完成——我从未抓到过微分几何学，当然，卡普在教测度论的那个学季，顺便访问过我好几次，而当我教伽罗瓦理论时，差不多每周有一次被难住，得去请教一次；但是我们连同学生们越过了障碍，最后没有任何感到惭愧的事情。

当学生修完全部必修课，就面临硕士考试，既有笔试（分代数、分析、几何三部分），也有口试。口试日程是精心设计的，使得我们这些教授得以在几个作为攻那些倒霉候选人的临时司

令部的教室里转悠，花上半个来小时盘问每个学生，所付的代价不过每年两三个下午。学生们当然怕考试，但从总体看他们精神状态良好。“审慎尊重”比害怕能更好地描绘他们的态度，他们知道会受到公正对待。当然，偶而在圣诞节时学生也会写一行嘲讽的话：“给我们一个教授们能及格的硕士考试，要不给我们能在硕士考试中及格的教授们。”

下面是一些典型的硕士考试题。

代数：是否存在阶为 49 的非阿贝尔群？[我承认这道题是我弄的，原来的题是：证明阶为 p^2（p 是素数）的群必是阿贝尔群。]我强烈地相信，一个以问号结束的未给出结论的特定问题，比一个表述成一般的、生硬的祈使语句的问题更有趣，更富挑战性，能更好地训练如何处理以后会遇到的“实际情形”，而且也能使主试人了解更多的情况。还有，让我们承认出题的人也会犯错误，因而“证明……”可能会出错；“是否……”就安全些。不过没有什么事情是完全安全的。有一次在一门课程中我出的一个考题类似于求如此这般的曲面上如此这般的点处的切平面方程。问题在于，我显式地、数值地给出所说的曲面和点，却忘了把点置于曲面之上。这种以及其他类似的疏忽使得有一年圣诞节讽刺角色把我描述为一本新书的作者，书名是《用于考试的错误定理》。

代数中还有：在整数模 3 的域上有多少个其元素数少于 100 的半单代数？求出 x^3-3x+5 在有理数域上的伽罗瓦群。

几何：求出空间曲线 $x(t)=(t, t^2, t^3)$ 的曲率和挠率。下述论断是否正确：如果一曲面上所有点都是脐点，则此曲面是平面或球面。（原先它也是一道“证明……”型的题。）

分析：如果 f 是一整函数，满足 $\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$，问 $f(z)=5$ 是否一定有解？是否存在实线上的严格递增实值函数，它的

间断点集恰是全体无理数构成的集合？构造一个在开单位圆盘内收敛的幂级数，其和函数以单位圆周上每个点为奇点。是否存在单位区间中具有正测度的无处稠密完全集，其特征函数是黎曼可积的？

判 断

并非每个通过硕士考试的人都成为职业数学家。两种不平常的情形浮现在我脑海中。

第一种情形并不那么非同寻常：只是主意有了改变。艾尔·范斯坦（Al Feinstein）是一个在数学上颇有才智的学生，但他没有把握他已为数学所感召，还不能肯定他需要为之献出毕生精力的就是数学。我同他是朋友（唉！一个年青助理教授在研究生中找朋友要比长着灰白胡子的教授容易），当他正在准备硕士考试时，老是靠在我肩上号哭（只是隐喻）：我应当怎么办？我应当走哪条路？最后他决定上医学院，我一直为他感到骄傲：他已成为医学界的重要人物，写了许多论文和书名诸如《布尔代数与临床分类学》这样的论著。

另一个故事的主角最后也是成功的，但因我说的有些话或许会使他尴尬，所以我用化名，让我们称他为瓦尔特。他也是我的朋友，一起打扑克、喝啤酒，他是我晚餐的常客。他也在有一次我闲扯了五六分钟的班上，扯的不是如何证明定理，而是如何判断学生，我趾高气扬地断言，这挺容易。我说，考试和分数对多数人而言是官僚主义的毫无意义的玩意，要决定一个学生是否具备能成为数学家的素质不难。给我一个小时，让我在随便轻松的气氛中同他呆在一起，恰恰从他谈论数学的方式，从他提出问题的方式，从他的态度到言谈，我就能判断他

能否具备这种素质。(有一次我碰到一个警察,正在当驾照考官,他对我说,恰恰从一个人上车和关门的方式,他就能说出此人能否通过考试;这给我很深的印象。)

我伶牙俐齿的底牌得亮出来了。课后瓦尔特来找我,问我是否当真,能否用这办法对他加以判断。我当然从来没有做过我才说的我能做的事,我只是在理论上很有把握而不是在实践上。可是我说,这有什么,瓦尔特,让我们一起呆一个小时,看看情形如何。我们这样做了。我们坐在埃克哈特大楼后院边上聊起来。我问他问题,他问我问题,我挺紧张,他充满焦急不安,当然我能保证在外人眼里我们很轻松。一小时结束,我说:瓦尔特,做一些别的事,你有才智,思维敏捷;你能推理,直觉洞察力也好;但你不是一个数学家,你决不会成为数学家。当然,我可能说得不对,别把我的话当作圣言;但你问了我,那么这就是我的回答。

瓦尔特相信我,遵从了我的圣言,离开了数学。他去了威斯康辛大学当某某学(Somethingology)的研究生。三年后他获得了博士学位,此后从未三心二意。他写了一大堆论文,培养了许多博士,成为一所第一流大学中受人敬重的正教授,以最好的数学[!]某某学家著称于我们国家。我们仍是互寄圣诞贺卡的朋友,偶尔谋面时,话旧甚欢。

事情已过去了30多年,我仍然认为能够比较早地挑出成功者,数学家的作风易于一如往常,年青时就定型。电影里常有这样的传统情节,一个钢琴教师听了新手弹奏的一曲贝多芬的奏鸣曲后,就立即能预言他们的未来,这一位只能是一辈子业余弹弹,而那一位则前程辉煌。我的音乐水平不足以确定这是否正确,然而我所说的是,在数学方面,类似的判断肯定是对的。

在作曲以及其他并非转瞬即逝的艺术——诸如绘画、雕塑、文学和数学中，这样的测试比对于演奏者的测试必要性较小，作品摆在那里，它本身能够也应当说话；历史将判断其价值，决定它流传下去或是无影无踪。没有把握的新手不想等那么长时间，他想在历史能够确定的时间之前征询专家的意见。我坚信任何仅仅具有通常洞察力和经验（当然还得具有坚定的信念和勇气）的数学家都能作出像传说中的钢琴教师那样的预言。而且我还相信，作出这样的预言（即使未被问及）是数学家的职责。让一个小伙子在永久沉没之前挣扎上几年是不仁慈的，逆耳忠言更仁慈。

我所遵循的一条规则（有例外，但只有少许）是，当一个学生来问“我是否应当成为数学家”时，回答应是“不”。你必须想要成为数学家，你才会成为数学家；如果你还得问，那你甚至都不用问。

我作出预言的勇气的另一根据是我看到不少研究生浪费了他们生命中的四年时光。你信不信，在某些大学里，面对不够果断的分科考试办法（“我们应当公平，我们应当给他们表明自己能干什么的机会”），真得用那么长时间在学生修完数学401课程之后第一个月再让他们得知明显的事实。

电影里的钢琴教师犯过错误吗？我们能否在估量学生的数学才能时不犯错误？答复无疑是肯定的：钢琴教师有时免不了要犯错误，我们所有人也都如此。但要注意与此有关的两点，一是错误的概率极小，绝大多数教师作出同样的预言而且他们的绝大多数预言被证实是正确的；二是错误并非灾难。失去一个好学生这样的错误，其代价是感情受到伤害，不满，愤慨，但这就是全部代价，他能够而且将会在某个时候以某种方式在某个地方继续前进，他的生活不会毁掉。我坚信，你不可能老让

一个优秀的人消沉。

我们一生都得被人评判。数学家职业生涯中两次最重要的评判一次来自研究生阶段初期，如果他获得了博士学位接着找到了工作，那么另一次来自供职初期。我是否干得很好，足以保住饭碗？我将得到升迁吗？我会得到终身职位吗？不恰当的好意又经常影响系委员会如何作出决定。在许多大学里，任命助理教授职位实际上是6年合同，系主任得等那么长时间才敢告诉一个不再那么年青的助理教授在他抵达校园一个月之内就已很明显的事实。我拥护一年任期——是的，一年。是的，我知道，第二年重新任命的程序得在第一年的第一或第二个月启动，但是我要说，对于估量一个年青的同事可能对系里作出的贡献，这点时间足够了。如果我们解雇了一个优秀人才，我们将蒙受损失。10次或20次里会有一次这样的可能。为了维护大学的学术高标准值得冒这样的险；再说，记住，我们不是在谋杀，你不可能长久让一个优秀的人消沉，不可能。

很多人在这些事情上不同意我的看法，但我敢肯定他们只是没有面对事实。是不是我说的只有害处？我是否在走极端？时间将作出判断——或者已经作出判断！

吉米·萨维奇

在我结识吉米·萨维奇几年前，我已听说过他；当他还是密歇根大学研究生时，就有招人厌天才的名声，老坐在前排，问些令人不快的问题。其实他根本不像传说的那样。

他块头挺大，虽然不胖，但体重超过一般人，而且很结实，通常头发凌乱，衣冠不整，戴着一副特厚的眼镜，更显得不怎么样。他患有眼球震颤症，眼珠子控制不住，几乎老在动。按

照某些定义，他的高度近视足以依法判定为失明。他看书时把书放在离左眼5厘米之内，斜着眼费劲地看——可是他读了很多书。他在人文科学、艺术和哲学方面具有广博的修养，他理解人们，喜欢其中大多数人。他很能习惯于凭借他的低下视力生活，以致并不总很明智。当我于1941年（那时他24岁）在高等研究院同他相识时，他的朋友还不能成功地劝他别骑着自行车在镇上转悠。至于前排，他一定得坐在那儿，他看不见任何别的地方。他老是带着高倍手持单目放大镜和袖珍望远镜，即使这样，他还得经常离开座位，走到黑板前60厘米处费力凝视。他问的问题——唉，他问得一点不错——或许惹恼了某些讲课者，但这些问题总是尖锐深刻，击中要害。

当你同吉米交谈时，他听你说——他真的关注你说些什么，你想说些什么。我们两人在芝加哥大学一起呆了14年，经常交谈。吉米比我稍微年轻一些，但当我需要忠告时，我大都会挑选他。

他并不喜欢每一个人，对他所不喜欢的人，他相当冷淡，但他交友和消遣的范围挺广。他的朋友之一是米尔顿·弗里德曼(Milton Friedman)，以右翼经济学家著称，而他的另一些朋友则属于激进左翼。在数学中，他能在纯粹微分几何（他的博士论文的主题）以及统计方法在医学中的非常具体的特定应用上坚守阵地，同他在一起是有趣的。但当转入他的专业领域——贝叶斯统计方法时，他就会是严肃的，郑重其事的甚至是不通人情的。

我们在芝加哥大学一起呆的14年实际上远少于14年，因为其中有几年吉米请假去别处，我也一样，而且经常不一致。第一次是我得到古根海姆基金资助去普林斯顿高等研究院那一年，那时他留在芝加哥。我们通信频繁，在我设法保存的信中，

有一封是严格地关于业务的。信里谈到我写的书《有限维向量空间》的销售。热爱线性代数是吉米与我共同点之一，但他的态度有些矛盾。后来在自传性谈话中，他谈到了在密歇根大学三四年级时的态度。“回想起来，成为数学家的绊脚石——虽然不太大，但却很重要——出现于数学中通称为线性代数的论题中。那时候关于线性代数的书我都理解不了，今天也只能理解一点儿。我曾重读那时使我困惑的这方面的书，我看不出来怎么会有人能读得懂。”

当我1948年春季在高等研究院时，《有限维向量空间》第一版已售出，普林斯顿大学出版社出了第二版。但是在分发过程中出了点差错，书店没有得到预定的书。我知道芝加哥大学至少有两门课要用这本书，于是我趁正在普林斯顿之便，溜达到出版社问他们能做些什么。我发现社里的人都很帮忙，他们不能立即纠正分派中的差错，但能给我100本书，如果这样做有帮助的话。是的，这很有帮助。我把这些书运到芝加哥大学，建议通过数学系让需要此书的学生买到这本书。一周后我收到了吉米关于这事的信。

> 亲爱的保罗：马歇尔（当然这是指系主任斯通）严禁通过系办公室销售你写的书，故事并不曲折，但充满智慧的一幕就要开场。
>
> 由于我开的统计课程亟需此书，所以我就（无人允许）自己来出售。希林帮我的忙，迄今已售出19本。
>
> 销售于星期一上午揭幕，现在[星期四]这100本的账目如下：
>
> 送给希林　　　　1本
>
> 希林售出　　　　19本

希林手里还有	6 本
我售出	67 本
我手里还有	7 本
	100 本

昨天芝加哥大学书店打电话来，说我违反了禁止与该书店竞争的委托条例，威胁要把我送进班房。我以 2.5 美元的价格售给书店 20 本（他们的零售价是 3 美元），以此来逃脱囚禁。这一步并不是自私的，因为上希林课的退伍军人宁愿让山姆大叔用 3 美元给他们买一本书而不愿自己花 2.5 美元。我担着责任，很想知道你是否认为事情已如愿以偿。[是的。]

又及：此书是否会很快公开发售？

说到线性代数，这里有吉米在一封信中出的一道题。信中写道，"你是否知道，如果 $S=A+B$ 可逆，则

$$AS^{-1}B=BS^{-1}A?"$$

我很高兴解出了这道题，尽管实际上它不属于线性代数，而属于环论。只需写一行的证明即可得到：在 $AS^{-1}B$ 中用 $S-B$ 代 A，同时用 $S-A$ 代 B。

吉米说他患有"对于波利亚（G. Pólya）-赛格（G. Szegö）的持续恐惧症"（指的是波利亚和赛格合著的关于分析的极其著名、长期流传的问题集）。甚至当他在巴黎写他的第一本（也是主要的一本）书时，晚上也花在这个恐惧症上，他写道："波利亚-赛格使我丢脸，我从不能确实知道会发生什么，不过我现在已能做书中不少问题，由此我似乎学到了某些具有一般意义的东西。"

这是他的一个消遣；另一个（后来的）消遣是日常饮食奇

物——肉糜压缩饼。传说肉糜压缩饼由优质水牛鲜肉制成：把水牛身上所有东西（牛角和牛蹄，瘦肉和肥肉，尾巴和肚子碾碎，再把它压成饼。不是所有人都同意上面说的配方正确，谣传印第安人还掺进一些草药，有一段时间一家大包装食品生产公司还把它作为商品上市。无论如何，这东西被吹成完全方便的食物，便于携带，当你跨越死谷或漫游合恩角时，它能提供你维持生存的一切必需养分。半是觉得好玩半是为了科学实验，吉米在三个月内只吃肉糜压缩饼和喝水，结果是，他饿了三个月，掉了8公斤，停止实验时拼命吃冰淇淋。

吉米同我合写过一篇论文，此文在统计界相当有名。合作始于吉米随便问的一个关于条件概率的问题。那些日子我老想着测度理论（还有《测度论》这本书），而测度理论是能清晰严格地过渡到条件概率的唯一手段。吉米教我关于充分统计量的知识，而我则教他关于拉东-尼科丁定理的知识，这两个主题之间的关系就是我们合写的论文的结尾。

对于纯粹数学的贡献，他不会被记起，但吉米在我心中无庸置疑是一个数学家。别人告诉我他是伟大的统计学家。我能证实，在所有我认识的数理统计学家中，他是最具有数学洞察力的。他了解数学，他理解它，对它有感情，能像专家一样看出它各部分之间的关联。

他是人，因此当然不会是完美的，但我知道他的缺陷只不过是一些瑕疵。他烟抽得很凶，尽管他老想戒掉。他不喜欢音乐，称自己是音调聋子。尽管他很风趣，但在某些方面缺乏幽默感。有一次他听说我约人打扑克，就责骂我“你这不是搞一个浪费时间的约会吗?”我听了大吃一惊。随着水平和重要性的提高，他的高傲也增长了。1940年的吉米或许会觉得1970年时伟大的吉米有点过于严肃。

吉米于54岁时去世。耶鲁大学为他举行了追悼会。会上艾伦·沃利斯（Allen Wallis）——长期一起呆在芝加哥大学的同事，统计学领域的合作者，私人朋友——的话使我深受感动。

“要描绘他的魅力，他的风趣，他的热忱，他的好奇心，他的智慧，他的雄辩，他的热情，他的慷慨，他的强烈，他的精细，他的复杂性，他的简单性，他的忠诚，他的多姿多彩，这超出我的能力。他充满了生活乐趣，并为许多人的生活带来巨大的乐趣。他是诤友、真友、挚友。他是具备令人敬仰的人格的真正天才。”

学生和课程

毕晓普和他的同班同学并不是我周围仅有的超级学生。扫视一下我的记分册（是的，我保留着它们）就会发现，在芝加哥大学工作时，我每年总要遇上四五位杰出的学生。“杰出”意味着他们日后成为卓有建树的数学家，其中许多人的姓名为整个数学界知晓并以他们为荣。这里挑出他们中的6位：海·巴斯（Hy Bass），保罗·科恩（Paul Cohen），莫·赫希（Moe Hirsch），迪克·卡迪森（Dick Kadison），伊兹·辛格，伊莱·斯坦（Eli Stein），每一位无疑都位于美国造就的杰出数学家队伍之中。

并非所有芝加哥大学的学生都好，其中有蠢的，有些人在那里仅仅能说他们曾在那里呆过。也有一位“造化之子”，或许具有一些天赋，但却毫无条理，还有怪癖（由此得到浑名——并不仅仅因为光着脚）。

还有一位，我将称她为威廉明娜，富有，中年，前退学生，她试图从我那里学习向量。一次讲课时，为了突出其特性，我

列举了不是向量的六件事物。我说，向量不是n个数的数组，向量不是平面上的箭矢，向量不是……我描述的几种别的可能的东西。我接着说，向量只是向量空间的元素（当然我刚刚定义了向量空间）。威廉明娜不喜欢这样。她查阅了《不列颠百科全书》中向量的定义，然后去找管教学的副院长，抱怨我狭隘，有偏见，利用教室权威传授私人观点。副院长很有经验，不为所动，不过他得到我这里串串门，问我是怎么回事。我作了解释，他挺满意，而我则执迷不悟，继续传授我的私人观点。期终考试有一道题是我以前提过的老套：复数集是不是实数域上的向量空间？威廉明娜的答案全文是："这是一个要花招的问题，如果我在这门课上学到了什么，那就是不回答要花招的问题。"

介于我提到姓名的第一流学生与威廉明娜之间还有许多第一流学生，还有一些只是很好（在大多数其他大学里，他们就该称为杰出的学生），也还有一些人，他们是从其他领域诸如语言、物理、工程、哲学到数学领域的有才智的访客。也有差学生和没有才智的学生，但极少。

芝加哥大学没有工程学院，但我早年教过他微积分的一个学生鲍勃·马圭尔（Bob Maguire）转向了工程。他长期在西部电气铁路工作，我俩是牌友。在他身上到底发生了什么情况？他怎么能从芝加哥大学的教育转到工程教育？

在第一、第二年中，发给我的班上学生的正式名单上大多数姓名边都打了星号。这意味着按照关于美国军人的法案，他们是退伍军人，它告诉我在业务上不要给他们打"R"。"R"是芝加哥大学的一种怪分，表示"注过册"（registered），我从未看出其目的何在，它同定居规定以及学生与学校之间的财务约定有哪些关系。如果你在一门课程上得了R，这在你获得该门学分上有用，所给的R就是你的收据。这是一个没有偏见的分数，

特别是，它对学生毫无伤害；但是山姆大叔不要它，退伍军人一定得有实在的分数。

在这里复述我的记分册没有什么意义，尽管其中有些东西读来会有意思，但是有一些零碎片断我不能秘而不宣。它们涉及从那以后在数学舞台上起着不平凡作用的人。例如，在一门课上，我把学生粗分为不错、差劲和懒惰。毕晓普上了这门课，他得“不错＋”。只有一名学生，其表现不能划入上面三类，默里·格斯顿哈伯（Murray Gerstenhaber）所分人的类是“＋＋＋”。他成为代数学家，同时还有别的兴趣。在他中年时，作为一位卓有建树的学者，他挤出时间获得了法学学位，得以坐在法庭律师席上。我认识走上此道的三四位数学家，我完全支持他们。我自己可没这样做，对此我也有点奇怪。

雷·孔泽（Ray Kunze）——日后成为卓越的调和分析学家——修过我开的数学251（代数入门课程，相当于伯克霍夫和麦克莱恩合著的书的水平）。在下一门课数学252上，学生中有玛丽·毕晓普（Mary Bishop），埃里特·毕晓普的姐妹，她凭自己的实力成为公认的分析学家（齐格蒙德的学生），她在数学252课上遇到未来的夫君吉多·韦斯（Guido Weiss）。（她英年早逝，死得很惨。）

1950年春季的数学253课蔚为壮观。注册规定从数学251课50人中过来40人，不过这40个人不是那50个人的子集。学季之间课程表和分科常有变动，你每次总得丢掉几个学生，拣到几个新的学生。这40人中有迪克·布洛克（Dick Block），阿尼尔·乔特赫莱（Anil Chowdhury），伯特·科斯坦特（Bert Kostant），保罗·莫斯特尔特（Paul Mostert），埃德·纳尔逊（Ed Nelson），维拉·斯蒂彭（Vera Stepen）。你知道这些名字中的大多数吗？或许会是这样，即使你觉得并非如此。

迪克·布洛克是有名的代数学家（我有胆量教他向量空间），伯特·科斯坦特是杰出的几何学家，如果这个词也能用于他研究的艰深的李（S. Lie）数学领域。保罗·莫斯特尔特研究半群，许多年后他对我的生活有过短促但重要的影响。在同一段时间里，我在马萨诸塞大学得到一个不费心劳神职位的许诺，而保罗则有意担任那里的教务长。我们在谈判期间保持密切联系，但以两人均未就职告终。两人中没有一个人说过另一人不去他也不去，但我们两个人都有这种倾向。

埃德·纳尔逊是一位倾向于物理学的分析学者，最近他转向非标准数系。他由于在国外（我相信是意大利）所受的优秀高中教育而在芝加哥大学显得突出，他也充分利用了芝加哥大学的编班考试制度。按照深深刻在我记忆中的传说，他跨过了“学院”阶段，没有去上过一次课；他在入学前两周内通过了学院的所有考试，获准作为正式三年级学生就读于数学系。至于乔特赫莱和斯蒂彭，两人已改了姓，前者现在是阿尼尔·尼罗德，一位递归逻辑学家，后者现在是维拉·普莱斯，一位数学计算机科学方面的专家。她也是在我的班上遇见她未来的夫君的。欧文·普莱斯（Irwin Pless）得到数学253课6个A分中的一个；科斯坦特和纳尔逊是其中另外两人。

那时厄尼·迈克尔（Ernie Michael）是芝加哥大学的学生。他成为一般拓扑学家，擅长选择定理（什么条件下你能在集合映射中选出连续点映射），但当研究生时他也对许多别的领域感兴趣。他甚至听过我开的两三门课，课外我们成为朋友。对于我们中的一些人，成为厄尼的朋友意味着我们得在礼拜天为他买午餐。他是严守教规的犹太人，在安息日身边不能带钱。他预先把钱存在我们这里，或者下周中自觉地把钱还给我们。而当那天走过自助餐馆取餐时，他就不付钱。他严守圣日规矩的

另一表现是星期六下午来访时，他不能按公寓底层的门铃，因为按了就会是在安息日“干了活”。天气好时毫无问题，他可以站在院子里我的窗下大声呼叫，我向他挥手，按动开门按钮，他就能进门。冬季窗户紧闭，叫喊无用。厄尼的另一个常用计谋是搓一个雪球，小心瞄准向位于第二层楼的我的窗户扔上来。这不包括在干活的定义之内。

1951年我上高等微积分的班上有一位学生拉里·沃斯(Larry Wos)够我忙的。尽管他童年时即已失明，他还是在自动机理论方面作出了极其重要的贡献并得过奖。在有盲人的班上教课得特别小心。你不能一手拿着粉笔指点“……现在取**这**个并把它代入**那个**……”，另一手拿着板擦在黑板上擦来擦去；你得说“……现在取我们刚得到的y的表示式，把它代入早先得到的联系y与z的公式……”。我试着适应，而拉里使课程顺利进行。他总是精力集中，认真听讲，用布莱叶点字法记笔记；他常主动回答我的提问，并且提出自己特有的问题。他不时在我办公时间来问问题，教他是一种愉快。我发现，观察他如何能“看见”数学概念很有意思。例如，有一次他说“……如果这函数单调，那就是对的……”，同时用左手向右上角划出一条向下凹的曲线。在听这门课的40人中，我给了6个A。拉里得A，吉多·韦斯也得A。

回顾这些日后卓有成就的初学者是很有趣的。关于这方面我能说很多，不过现在我得打住，只再说一点去乌拉圭前一年我上的最后一次测度论课程。如同芝加哥大学许多别的班一样，它大小合适（超过40人），有几位日后成为著名数学家。其中四位是瓦尔特·费特(Walter Feit)，以费特-汤普森单群著名于世；约翰·伊斯贝尔(John Isbell)，上帝宽恕，他成为范畴论专家；卡雷尔·德·李乌(Karel de Leeuw)，出色的调和分析

学家，中年时被一个患精神病的学生残酷杀害；还有斯特林·伯布林（Sterling Berberian）。对于那些日子他的朋友，伯布林的名字是萨姆，甚至现今他写信给我时仍记得签上萨姆这个名字。萨姆的兴趣同我的兴趣并不完全相同，但有不少相同之处。同我一样，他也写了一本关于测度论的书和一本关于希尔伯特空间的书，他不断地写别的书，其中有一本是关于泛函分析的，这是我从未抓住过的主题。

埃克哈特大楼里有"夜班"和"周末班"，大楼里老是生机勃勃。背发疼了？或许是的，但是同数量多得惊人的高水平学生在一起，是值得让背疼一阵的。撇开个人看法，40年代末和50年代期间的芝加哥大学数学系要不是是世界上最好的，那也充分接近于我这样说一定会得到别人的原谅。

开始研究希尔伯特空间

20世纪40年代末，我开始实践我的一个信念：为保持活力，你必须每五年换一个领域。现在回顾一下，我能看出这个思虑不周的戒律的两个不甚明显的方面。一是，我不是最早发现它并付诸实践的人，但是，注意到我似乎确实每隔那么一段时间改换方向，我从实践中总结出了它的优点，把它表述为一句至理名言。二是它有效。一个创造性的思考者只有不断发展，才是有活力的；你得不断学习新事物来理解旧事物。其实你不一定要改变研究领域，但你必须通炉子添燃料，扩大研究范围，奋发努力，不故步自封。

随着我本人研究测度论的聚光点开始忽明忽暗，我发表了两篇关于别人的测度理论的评论，一篇是关于李雅普诺夫定理的（大意是良态向量值测度的值域是闭凸集）。凯·兰德·布什

(Kai Rander Buch)发表了一篇关于闭性的文章。此文使我生气：在我看来它冗长，故弄玄虚，复杂得没有必要，我肯定能做得比它好；我思考了这个问题，找出了比他做得好得多的办法，赶紧写了一篇评注给《美国数学会通报》。我的证明比布什的巧妙得多，也简短得多；但是他的证明是对的，而使我羞愧的是，我的证明却被证实是错的。詹森和狄奥多涅两人都写信告诉我，我的文章中关键的引理5是错的。真遗憾，那是多好的一条引理，它断言两个紧拓扑的生成拓扑是紧的；对于这个断言，不仅易于找到反例，而且难于找出它为真的有价值的例子。公开被人抓到岔子促使我坐下来更深入更有效地彻底思考这个问题。我的第二篇评注在第一篇之后一年(1948年)发表，长度为第一篇的两倍(6页)，它正确、优美，此后曾被大量引用。现在它已被完全取代：1966年林登施特劳斯(Lindenstrauss)发表了最巧妙的证明，结束了以前所有的证明(发表于《数学与力学杂志》)。

1949年我发表的另一篇短文引起了情绪激动的反应。惹起这事的是泉信一的一篇文章，文中证明的是不成其为定理的论断。文章主题属于遍历理论。此论断的表述是：在关于保测度变换T的某些限制较严的条件下，可断定诸如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}f(T^{n}x)$这样的级数几乎处处收敛。泉信一的证明比较复杂，就我所能说的，它绝对正确。然而它有问题：所述条件如此之严，以致只有作用在仅由一个点构成的空间上的恒等变换才满足此条件。

随着这两篇文章的发表，我研究测度论和遍历理论的生涯告一段落。1948年我在美国数学会做过特邀报告，后来1960年又做过另一次报告。由这些报告写成的文章以及以后出版的两个东西，本质上是综述性的，但有助于保持我乃测度论专家的

神话。从四分之一个世纪前出版的《测度论》学到测度理论的人仍不时写信来，或由他们的学生写信来，询问这个领域的研究现状。但愿我知道这方面的现状。

1950年，我关于希尔伯特空间的研究开始取得成果。在我的研究日记上我向自己提出一个问题（我已记不得怎么会提出来的），它变成了一座金矿。这个问题是："何种矩阵能出现在正规矩阵的西北角上？"现在其解答是容易的，称为膨胀理论的方法能用两三句话加以处理。瞧！用膨胀理论，扩张是一小步（无论如何这是比较自然的概念）。我发现了次正规算子。在紧接着的两年里我向构筑次正规算子的理论迈出了最初几步。如果在今后100年里还有人记起我所曾做的工作，看来次正规算子会是其中之一。

我的朋友利奥波德·纳克宾（Leopoldo Nachbin）是一本叫《巴西数学总汇》的默默无闻的杂志（它迄今仍默默无闻，事实上我甚至不知道现在它是否还在出版）的编辑，那时我正准备发表关于次正规算子的第一篇论文，他让我把稿子投给他，我照办了。于是就出现了这篇文章。

发表这篇文章的当年，我开了谱论课程，以此来跨出研究希尔伯特空间的下一大步。这门课的中心是重数理论，其研究始于希尔伯特的学生赫林格（E. Hellinger）。像他那一代许多德国人那样，赫林格在希特勒时代避难美国。他在伊利诺伊理工学院——有些数学家称该校为"负T"["IIT"（Illinois Institute of Technology）——懂了吗？]——，我对他有些微了解。他所做的是把埃尔米特矩阵或正规矩阵本征值的重数概念推广到无穷维空间，这种推广是重要的。由于无穷维空间上的正规算子可能根本没有本征值，因此主要难点就在于想出当本征值不存在时怎样使之也有重数。

原来答案在测度理论之中。测度理论是计数的一种推广。你对没有任何元素的“集合”“数”其元素（因为作为零测度单元的每个元素与空集等同了起来）。计数的这种推广恰恰正是无穷维重数理论所需要的。斯通1932年的书中有关于赫林格工作的系统阐述，但很复杂，纳吉1942年的论著也涉及这一论题。20世纪40年代中期，流亡到苏联的另一德国避难者普莱斯涅（A. I. Plessner），同一位名叫弗拉季米尔·罗赫林（Vladimir Rohlin）的学者合作，发表了一种改进的方法。（罗赫林后来放弃遍历理论和希尔伯特空间，成为著名的拓扑学家。）这些概念刚在流传之中。我急于想学到普列斯涅和罗赫林研究出的东西。弄通某一事物的最好途径是自己来教它，我不顾一切，宣布我要教一门课，其目的是在希尔伯特空间公理与重数理论之间建立联系。

我下一步所做的是我极想向要在很短时间里教一大堆材料而又不在乎于苦力活的人推荐的。我坐下来，写出整个课程：绪论，列举并讨论预备知识，定义，定理，证明—— 所有一切。写出来的并不是一本书—— 我没有打算写成一本书，它是一堆教案。我下定决心，努力使它简短：我只论述处于中心地位的特殊情形（有界埃尔米特算子），我用电报文体写作，我略去了连结论述，即使得冷酷的“定理-证明”型报导变为惬意的可读表述的阐释性议论。这些讲稿油印后于上课第一天送到学生手中。然而，到那时我的苦力活还没有完成一半。

我告诉班上学生，我希望他们以平稳的速度即在本学季10或11周内每周读六七页来研读这些讲稿（总共70页），稿上的定义、定理和证明就再也不在讲课时讨论了。上课时要谈的是外围论题：该科目的历史，它同数学其他分支的联系和类似性，它的应用，让学生做的用以发展他们技能的的习题以及（每当

可能的时候）该领域中仍未解决的供研究用的问题。

这样做很有效。我挺热情，学生也很合作，我们以巨人般的步伐讨论完基本内容。讲稿中有错，学生们乐于找出其中的错误，精神状态高昂。

当课程正式结束时，我一直打算要做的最大工作仍摆在我面前：写一本包含所有上述内容的书。有讲稿和讨论做后盾，工作就很愉快，即使对像我写的《希尔伯特空间导引》(114 页）这样的小书，也比没有讲稿和讨论写作时可能经历的容易得多。

那时我的著作的出版社是范·诺斯特兰德（Van Nostrand）出版社，直到 20 年后他们不再经营高等数学业务之前，我一直同该社合作，不过在关于希尔伯特空间的这本书上他们让我很不高兴。当手稿接近完成时，我写信给他们问他们是否想出版此书。我并不指望他们盲目赞同。我特别要问的是，先把质量判断放在一边，会不会该书太小以致不能独立存在？回信口气明确：不，决不会，请务必让我们看稿件，简短不成为障碍。好极了，几周后我把稿子寄去，靠在椅背上坐等。回信来得相当快（甚至可能比仔细评价一本书所需的时间还要短）：谢谢，但不；我们肯定您写得很好，但它过短，不适合我们的规划。至少我有点生气，这不对吗？

艾伦·加卢顿（Aaron Galuten）在大战期间是哥伦比亚大学的研究生。在他和他的一些朋友研读过程中他们发现需要一本可靠的书，有一本最近在德国出版，但在美国不易弄到。任何书要几本总是办得到的（从《数学评论》要一本，从中立国进口一两本，由旅行者带进几本），但广泛发行则困难，甚至不可能。加卢顿想出的办法是建立一个专门的出版社，凭借战时按《外国资产监管法》的通常安排，筹划重印所考虑的书。这个办法有效，而且它导致另一件事——使切尔西出版公司恒久

存在。我把自己的小书寄给加卢顿，他刊印了此书。此后我们双方都很愉快。他的公司（从亲戚的皮货店后屋起家）繁荣壮大，到现在（40 年后），它的出版目录上已有 200 多种书，其中许多原先是国外出版的，在切尔西公司从湮没中把它们抢救出来之前，早已绝版。我关于希尔伯特空间的书列在该公司的出版目录上（后来又添了两本，《遍历理论》和《代数逻辑》）。30 多年后，此书现在每年只售出一二百本，但它仍在印行，顾客也挺满意，我也一样。如果我仍在抽烟，我从切尔西公司取得的版税收入还不够我的烟钱。

博士生

我在芝加哥大学教了许多研究生课程，通过这些课了解了相当多研究生。很自然其中有些人会接近我，请我当他们的博士生导师。第一批是丹·奥洛夫（Dan Orloff），阿伦·布朗（Arlen Brown）、乔·布拉姆（Joe Bram）和埃里特·毕晓普。

丹·奥洛夫是我在芝加哥大学教的第一门课（关于遍历理论）的学生，他是好学生，一个退伍军人，成熟友善，我们经常一起喝咖啡，吃午饭。一年后，当我在高等研究院时，他写信给我，问我是否愿意收他为博士生。我心满意足，回信说好。丹一直不知道，我的回答逐字逐句来自乔·杜布对我说的话：“我想我们能找出某些东西让你去干。”我们这样做了，事实证明很有效。他成为我的第一个博士生。他没有留在学术界，而供职于一家飞机制造公司。大约在他获得学位 3 年后，我偶然碰到他。我们开始谈起工资，当他得知我的工资（7 500 美元）时深感惊骇，他的工资比我的高一倍。

工资让我想到级别。1949 年春天一个令人感到舒适的下

午，马歇尔·斯通敲我办公室的门。我正脱了鞋横在沙发（办公室的基本设备）上，不过我已午休过，因而和善地喊了一声"进来"。马歇尔走了进来，对我随便的着装评论一番，然后告诉我好消息：我将在秋季被提升为副教授。这一年是我到系里的第三年，获得博士学位后的第十一年。我的工资将从 5 500 美元涨到 6 000 美元。新职称自动地带来终身性，教授们称之为"永久任职"，而行政方面则用"无限期任职"一词。还得过 7 年我才成为正教授。经 7 年从副教授升为教授比通常情形稍慢了些（那时麦克莱恩当系主任，对于我的优秀品格，他能抑制住热情），但慢得不多。那时我 40 岁，获得博士学已有 18 年。

阿伦·布朗实际上是在我眼皮底下成长的。他是通过学院阶段按教育体制要求研读数学的少数几个人之一。从他的情况判断，这个体制是好的。我在教一门比较初等的微积分课时碰到了他，然后又在教一门高级的专门课程时碰到他，两门课都是关于无穷级数的。尽管我们现在是同事，完全平等，年龄之差看来也已收敛于零，但他不久前还告诉我，这些早期课程仍不时来到他脑海中，并影响他对我的想法。有一次我大声谴责 δ 不确定的证明。我说宣称"选取 x 使得 $|x-x_0|<\delta$，其中 δ 将在以后确定"是潦草思维，它可能导致循环论证以及别的错误。我争辩说，当必须选择 δ 时，选择 δ 就是证明者的职责，由此向接受证明者确保参数的选取的确按应有的顺序进行。我早已不再对此有如此激动的情绪，但阿伦说，甚至到现在，当在极少数情形中他确实提供了一个 δ 不确定的证明时，他心里就会有点不安：不，不，我一定不能这样做，老师说这样做不对。

约在 1949 年或 1950 年，阿伦开始认真随我进行关于博士论文的工作，但当我在 1951 年休假时，他转而去跟卡普兰斯基，并由卡普兰斯基指导完成论文。稍后伯兹·加勒（Buzz Galler）

先跟斯通随后由于类似原因而随我完成学位论文。在这两位中间在我名下至少还有一位全程博士生。阿伦同我在很长一段时间里保持密切的个人和专业接触。他去了得克萨斯里斯研究院(当时这么叫)，但两年后当我在密歇根大学时，我为他在该校谋到一个工作，因而又同他在一起。后来他仍调到印第安纳大学，而我则在夏威夷，他为我在印第安纳大学谋到一个职位，转来调去公平交易。

另一方面，伯兹·加勒同我没有能保持联系。他在计算机方面做了许多事，在行政管理方面也是如此，这意味着我们两人在很不相同的圈子里活动。我喜欢回想伯兹，至少有一个原因是他是我带的数目很少的逻辑学方面的学生之一。(以人体计，数目为3，以实际成份计，则为一个加两个半个。)他走上这条路是一则令我愉快的故事。在我被逻辑缠叮牢的那些年里，至少暂时慢慢受到我的想法影响的一位数学家是我敬重的长者马歇尔·斯通。马歇尔在一门(或两门?)课程中讨论了我的工作，并开始对此进行思考和写作。当加勒要他指导时，马歇尔建议他在代数逻辑方面进行研究。因此，在某种意义上，对我如同父亲般的人物斯通部分地也是我专业方面的儿子，而我的(半个)学生加勒则以不可计算出的成份既成为我专业方面的儿子，又成为孙子。

乔·布拉姆听我某些课程时是最安静的学生，他几乎既看不见又听不到。他坐在教室后面，直接向他提问时才回答(答得对)，从不主动答问，考试时所得成绩近乎完满。他的学位论文是我所曾带的学生中做得最好的。那时我对次正规算子感兴趣，而乔有力地推动了这个论题的发展。他关于这个论题(或所有论题?)的论文迄今仍很有用并被广泛援引。

埃里特·毕晓普是芝加哥大学学生中我最引以为自豪的。

他意志坚强，我不敢说我对他有很多影响或教了他——他造就了自己。他选择自己的论题，他写了一篇好论文，然后他发现该文大部分，天哪，已由纳依玛克（M. A. Naimark）做过，其主要结论是正算子值测度的扩张定理，于是他撕掉了已做的文章，继续写出甚至比前一篇更好的学位论文。当他发现奈玛克抢先取得的成果时，我告诉他我无论如何准备接受他的学位论文。我知道那是他独创的工作，因而它完成了学位论文所应完成的事情：使他在研究的水平上获得思考和写作数学的经验。毕晓普不要这样，他要做无人在他之前已做过的事。他这样做了，然后继续前进成为更加强有力的数学家。他发现了关于函数代数的许多基本概念以及它们之间的关系。接着几乎毫不停顿地“非常认真地”走向构造性数学，写了一本使“构造性数学”这个词十分著名的书。他开创了这个学派，是这一派的领头人物，但多少又是勉勉强强的精神领袖，直至去世。泛函分析想念他，构造性数学也想念他，最重要的，我们，他的朋友们真想念他。

坎布里奇国际数学家大会

国际数学家大会早先通常在闰年召开。战前最后一次开于1936年，预定于1940年在美国召开的大会取消了，或者说，实际上它推迟到了1950年。从此以后，国际数学家大会排在两个闰年中间召开。

20世纪40年代后期，我同美国数学会的接触越来越多。我参加许多会议，我不时被指派干一些低水平的会议日常事务，但我不由自主地全神贯注地去做。1949年，我发现自己成了这一机构的一个小小但有效的反对派的一员，但这只是使我同数学会的联系比以往更紧密。中心议题是即将召开的国际数学家大



E・毕晓普，1980年

会。

当大会安排还在讨论之中时，我的朋友们就同我对安排事宜吵吵嚷嚷，以便引起掌权人物的注意。他们担心受我们正在放出的噪音的影响。在博尔德夏季会议上，莱夫谢茨来找我，用不同寻常的外交努力让我使事情冷下来，他说我们不是在协助我们本想帮忙的事业。或许他是对的，或许他不对。我倾向于认为我们的噪音使得当权者意识到我们的观点，考虑这些观点，并采取一些步骤，没有这些步骤大会的召开会是非常困难的。

麻烦的起源是政治性的，表达不满的口号是“一个自由的大会，否则别开！”美国正处于战后爱国主义的高亢情绪（我们战胜了！）与麦卡锡主义（他们正在获胜！）的歇斯底里之间，我肯定像莱夫谢茨这样的数学界当权者想开一个自由的大会，但美国国务院，可能由于害怕众议院，或者公众舆论，或者赤色威胁，正在制造美国数学会不易克服的困难。洛朗·施瓦尔兹（Laurent Schwartz）受邀作为特邀报告人，而雅克·阿达马（Jacques Hadamard）将是大会名誉主席。施瓦尔兹是著名的托洛茨基主义活动家，而阿达马（年已 85 岁）是反纳粹的自由主义犹太人。问题是他们以及另外几个同等危险人物受到了不能获得为参加大会必须的美国签证的威胁。

不知是由于年青反叛者的活动还是与他们无关，临了一切顺利。施瓦尔兹和阿达马被准许入境，而且据我所知，无人被拒于国门之外。

后来施瓦尔兹经常访问美国，在很长一段时间里，每次他申请签证时，总会碰到同样的困难和耽搁。美国各大学迫切需要请他当客座教授，但为使他受邀成为可能，需要高层的影响和压力。我最后一次见施瓦尔茨是 70 年代在伯克利，他告诉我到那时他的极度不受欢迎反使他到美国来变得容易。出现这种情况是由于他曾有一次是如此“危险”，因而受到彻底调查，他的活动和交往都被详细记录入档，巴黎的美国领事馆官员对他的档案了如指掌。对一个新人，年轻的左翼分子，不了解的危险人物，一定得仔细审查，不过对于施瓦尔兹，那个熟悉的、知名的快乐小老头来申请，嗨！关于他我们知道应当知道的一切，给他签证只不过是例行公事而已。

1950 年大会的出席者介于 2000 人到 3000 人之间；此后会越开越大，已出现过 6000 名出席者，而 8000 名出席者也在预

期之中。坎布里奇大会几乎已过大：后来的各次大会已非“几乎”而肯定是过大。在坎布里奇大会期间，如果你看到某位你想同他交谈的人，你最好当时就逮住他——你再偶而碰见他的机会是零。我很高兴碰见了施瓦尔茨和阿达马以及其他那时只是其姓名富有魅力的数学家，但我已开始怀疑大会的数学价值。

我本人在坎布里奇大会上所起作用挺小，但却是正面的。大会组织委员会指定了一个关于测度论的专门小组，由狄奥东涅、马哈拉姆、奥克斯托拜（Oxtoby）、乌拉姆和我组成，以我为发言人。“发言人”意味着由我负责准备书面报告并发表口头报告。我为此忙碌，但这是令人沮丧的经历，并未以荣耀的光彩结束。马哈拉姆和奥克斯托拜很合作，两人都提供了我要的材料，考虑周全，准备细致。我要做的是统一名词和记号。狄奥东涅彬彬有礼但缺乏耐心，他有别的更好的事要做。他允许我作出推想，但他寄来的东西仍需做相当多的工作才能发表。乌拉姆没有回答我前几封信（我忘了n的值，但它并不小），第n+1封信的回答是一张明信片。他没有寄什么东西给我，但他下星期四路过芝加哥，他乐于向我提供我所需的任何建议——或许我们能共进午餐？对此我感到难过，它意味着到头来小组里除他之外我们四个人的努力是不完整的因而是浪费时间。我尽我所能写出报告，附有一页态度不明朗的摘要。这份不完整的手稿仍在我的资料柜中，这是关于测度论研究状况的过时了30年的最新的不完全报导。

追逐太阳

我在许多大学教过书，在这个意义上我或许比我的大多数同事具有更丰富的教学经验。在许多年中于许多地方结识许多

学生的一个令人发窘的不便之处是地点、时间和情节老会混在一起。我不想忘记学生S，但他是Y年在U大学的学生抑是Y'年在U'大学的学生？他是否与S'同班？这个问题并不那么重要，但当你问S是否仍同好人老S'保持联系随后你得知两人从未听说过对方时，就会感到难堪，而这却发生过几次。

不管怎样，为什么我的教学经历地理上如此分散？理由之一是天生的永不安定的秉性；另一理由是，在温和的意义下，我是太阳崇拜者，而芝加哥大学对待告假去它处的灵活态度有助于我追逐太阳；第三个理由是学季制度。

芝加哥大学一年确有四季。秋季、冬季和春季是学年的主要部分，但夏季学季不只是附带的夏季学校，而是体制运作中充分起作用的部分。除工作认真、回校继续读硕士学位的中学教师外，许多研究生整整一个夏季呆在学校。他们为什么这样做？部分是受到应当这样做的劝导，部分是为了更快获得学位。我就是劝导他们呆在学校的人之一。我坚信如果一个数学家在一段长为t的时间内不做数学，那他得花长为t的时间来重新迈开步伐。按照这一信念，全部夏季放假意味着数学上不是3个月而是6个月的退步。(学季制有较短假期：9月这个月份不存在。)

由于有严肃的夏季业务，所以得有适当数量的教授，这就使我的太阳崇拜派上了用场。带着孩子在学校的人，除了夏季外，不可能在任何别的整个学季离开。我没有孩子，在烦人的冬季或芝加哥称之为春季的那个令人抑郁的、阴暗多雨的、满地雪泥的季节，我就能（也极想）整学季不住在那里。这就使我在时间安排上受到同事的欢迎，又使我有可能接受去气候条件较好的大学诸如图兰或华盛顿大学短期访问的邀请。这样的访问可在发出邀请的大学的正常学年中进行，于是各方都很满

意。

有时能安排一整年的休假：在芝加哥大学时，我有一年在蒙得维的亚大学度过，后来在密歇根大学时，又有一年在迈阿密大学度过。这使我晒到很多阳光，接触到很多不同水平的学生。从学生质量上看，我把我所受雇的大学排序为：芝加哥，密歇根，伊利诺伊，图兰，印第安纳，圣巴巴拉，锡拉丘兹，迈阿密，夏威夷。在蒙得维的亚和西雅图，我的交往极其有限（只同三四个研究生当然还有教授们接触），因而难于作出合理推断。

每当我移居到亚热带地区，不消几个月（或不到几个月），我又会发现除太阳之外，生活中必定还有别的东西——每一次我又返回中西部。当我说“移居”到暖和环境，并不只意味着把我的房子租出去并在新地方租进另一座房子。当我从密歇根迁居夏威夷以及后来从印第安纳迁居圣巴巴拉时，其实是搬家——卖掉房子，扔掉冬装，捆起全部图书，把家具和钢琴装上搬家车辆，购买新房并在新居安顿下来。我在夏威夷住了一年，在圣巴巴拉住了两年，然后又卖掉房子，捆好图书，装上货车，购买新房。

充满阳光的地方有什么不好？理论上，没有。然而实际上对我来说，那里只有阳光，没有别的，我想低质量的数学系不一定是好气候的必然产物，但看起来事情几乎就是如此。伯克利是一个反例，或许拉乔拉是另一反例（我只从两次一天的访问中了解该校）。我在气候温暖的地方失去的不仅仅是活跃的数学气氛，还有某些重要的文化要素，显著的例子是音乐。在芝加哥和安阿伯，尤其在布卢明顿，音乐生活丰富多彩。几乎每天都能容易地听到好音乐。（更正：在布卢明顿确实是每天。）在我呆过的充满阳光之处，音乐会极少，很贵，而且离得很远。

把所有这些带到我心头的是蒙得维的亚之行，我就要说说此行。它不是一次探险，却是一种经历。它使我密切接触到与芝加哥不同的文化（正如芝加哥文化与布达佩斯文化不同）。我学习了新的语言，遇见了新的人群，在某种程度上感到心灵丰富了。这种财富的增长很难用流水账记述，所有这些表现出来是细微的偶尔的内心省语或惊人看法，它们又被经常遇到的琐碎烦恼所抵消，表现出来的还有令人着迷的新的行为、态度和习惯，与之相对的又有出乎意料的障碍、延误和不便。所有这些都始于……

第十章　蒙得维的亚

去哪儿？

所有这些都始于我的乌拉圭朋友拉斐尔·拉瓜尔迪亚(Rafael Laguardia)在坎布里奇大会上走近我之时。几年前我同他在布朗大学和普林斯顿就已相当熟悉，当时他问我会推荐谁特别是哪位统计学家去蒙得维的亚大学当一年客座教授。我毫不犹豫地答道："我"。他和蔼地笑起来，把我的答复当作半开玩笑，并且问我是否把自己看作统计学家。我同意远不那么确切，但我在统计学方面发表了两三篇文章，对概率论确有某些想法，此外，我对去乌拉圭真有兴趣。最后这句话使他印象最深，看来在美国只有我才有此表示。他挺喜欢我，想让我去，麻烦在于他得说服校长拨出经费来请我这个貌似有些实践的客座教授。我给了他两三个姓名作为后备，分手时想，可能吧，谁知道呢？

通常搞学术的人是一群周游世界者，数学家尤其如此。只要有一半机会，就没有什么比打点小皮箱，访问呆在巴基斯坦或塔斯马尼亚的朋友或同事更使他们高兴。第二次世界大战结束后不久，他们得到的是比一半大不少的机会。富布赖特基金

和古根海姆研究基金差不多对申请者有求必应，还有许多别的培训外快可以动用。这种情形增加了患流行病的比例——我的朋友一个接一个地去欧洲、南美洲、印度和其他充满异国情调的地方，一个接一个回来讲述令人激动的时间里发生的奇妙故事。我觉得我一定得参加进去。去哪儿？借助富布赖特规划我可以试试法国、英国、印度、缅甸或埃及——浪漫的异国文化探险在向我召唤。怎么选择？

我开始排除只有异国情调而没有别的长处的地方。我要继续做数学，我只是想有一段时间在不同的地方同不同的人一起做数学。我心中考虑的别的因素是气候、语言、政治和新奇感。

从严格的科学角度，我本来应当选英国或法国，很清楚在其中任何一个国家我都能找到有趣的同事去讨教，也能找到有趣的学生去培育；我能找到已经定型的良好学术传统，我还能最近似地复制我已习惯的科学上极其接近的理想条件。还是这些理由使我决定放弃欧洲。我想我能离开激励科学发展的场所有益地度过一年，来发展我自己的思想。芝加哥与例如牛津的差别，在数量级上显得同中西部州立大学与其他大学之间的差别不相上下。

气候对作出决定也有作用，法国气候没有什么可特别加以推荐，英国气候恶劣是人所共知的。语言显示同样的状况。我从未学过法语，我所知道的一丁点儿法语使我觉得它很难；另一方面，英语又太容易——我想学到一种新的语言并把自己置于逼得学它的境地。至于政治，我对英国还是法国的政治体制没有意见，但我不特别相信它们的稳定性。有人觉得，战争随时可能爆发，而我不想搁浅在欧洲。更糟糕的是，欧洲对我并无很多新奇感，毕竟我生于欧洲，尽管我没有在英国或法国住过，但我曾去这两国短期旅行过，我觉得我充分了解那里的气

氛和文化。很可能所有这些推理都只不过是试图作出合理的解释，很可能由于种种自己甚至未能承认的理由，我预先作出了放弃欧洲的判断，然后再来为这个决定寻找根据。可能我就这样骗了自己，决定努力试探去南美洲。

从数学方面考虑我立即排除了阿根廷、巴西和乌拉圭三国之外的所有南美国家：那里差不多找不到数学家，当然墨西哥和古巴不计入内，它们不在南美洲，再说去那里就会像作弊，它们离美国如此近，又如此相似，很难说它像是一次旅行。好吧，那么去阿根廷，巴西还是乌拉圭。

从数学上看，就我从相当远处判断，在 A（阿根廷），B（巴西），和 C（乌拉圭）中挑选余地不大。三国都大约落后于美国 50 年，都在试图建立数学传统，而且都已取得某些进步。由于去阿根廷意味着去布宜诺斯艾利斯，去巴西意味着去里约热内卢或圣保罗，去乌拉圭意味着去蒙得维的亚，这些地方都位于亚热带，气候条件都有吸引力。无论西班牙语还是葡萄牙语，我都一句不会，但人们都说两者好学，我想我能捡起任何一种学到足以对付过去。A，B 或 C 都很新奇，关于西班牙文化我一无所知，我从未去过南美洲，我急切地想去了解。于是决定将由政治方面考虑作出，最重要的，由实际可行性来作出。决定去（譬如说）巴西，这对我非常好，可是怎么才能去那儿？政治和实际可行性——怎么去做？

从政治上看，字母顺序 A，B，C 正巧符合我喜爱程度增加的顺序，我最不喜欢阿根廷，最喜欢乌拉圭，对巴西我近于中立。我对庇隆政权的厌恶如此强烈，以致即使有机会，我也会决定不去阿根廷，但我决定一开始让所有大门都敞开着。

第一步是在坎布里奇大会上迈出的：同两位阿根廷数学家贡萨来斯·多明格斯（González Dominguez）、雷·帕斯特（Rey

Pastor)，两位巴西数学家坎迪多·利马·达·西尔瓦·达亚斯(Candido Lima da Silva Dias)、利奥波尔多·纳克宾以及我的乌拉圭朋友拉斐尔·拉瓜尔迪亚聊天。我以前不认识GD和RP。尽管我提到斯通的名字作为引荐，交谈还是多少有点正式，不很有帮助——是的，是的，我们很喜欢请您，可这些日子我们处在可怕的破产状态之中。(情况确实如此。)有点使事情更糟的是交谈用的是蹩脚的英语（GD）和更加支离破碎的德语(RP)。用德语交谈是由于当我走近RP时他说："西班牙语？意大利语？德语？法语？英语——不！"当我同意用我那点可怜的德语，我面临的难题是用它来唱我自己的赞歌——事实证明他从未听说过我。再问一次，我在哪儿工作？我贵姓？我研究什么？我说我写过的一本书是讲什么的？……唉，天哪！

同坎迪多和利奥波尔多的谈话进行得比较顺利，但并不更有效。坎迪多说，是的，当然啦！他会看看他能做什么。利奥波尔多伤心地摇摇头，说他什么也做不了——他本人当时的政治情况很糟，人人都破产了，他受到极度怀疑。

所有这些，当然还有拉瓜尔迪亚，都指向乌拉圭，还有别的事情也指向那里。大约在1950年秋（上述谈话都是那时进行的）之前一年，我一直在谈论我的希望和打算。我的许多朋友对乌拉圭表示了很大的兴趣，主动提供关于那个国家的情况。由于半严肃地（更精确地说，百分之一严肃地）害怕会有打起仗来那么一天，有一个随时可用的避难所当是明智的，所以他们打听到了这些情况。美国的外交政策不能说是理想的，看来我们似乎正以我们所能达到的高速度向一场愚蠢的、毁灭性的战争前进；言论自由和思想自由还存在，但正在缩减；政治迫害在进行；原子弹快要扔下；早就从别处移居来的外国人和土生土长的美国人都在审时度势。我不会比同我紧邻的人更喜欢原

子弹扔到头上，于是就有兴趣把乌拉圭作为可能的避难所来调查。来自肤浅研究（在鸡尾酒会上同朋友的交谈）所能收集到的一切看来都是好的。这是边界南部——或许是全世界——最正常的国家，民主政府；10年中没有过流血革命；低犯罪率；没有失业；没有富裕的压迫阶级和被压迫的贫民；自由的移民政策；坚挺的货币……天堂般的避难所？

恶补西班牙语

当拉瓜尔迪亚同我交谈我访问蒙得维的亚的可能性时，我们也谈到了语言问题。他说如果我学会西班牙语就会比较好，这样同学生交流就会容易得多。我发现这个说法挺奇怪：我本应设想会西班牙语是必不可少的条件，而实际上我是后来才得知这一点的。几乎没有什么大学生能说或能听懂英语；对于那里的绝大多数大学生，用英语讲一堂课就会像在圣迭戈加利福尼亚大学用西班牙语讲一堂课一样神秘。或许拉瓜尔迪亚只是委婉和彬彬有礼。

这样，甚至在受到正式邀请之前，早在一月份，我就开始学习西班牙语，我有9个月时间准备用我当时一窍不通的语言来生活和讲课。

恶补的方法是开干。我以平装本《看图识西文》慢慢开始。我发现该书很有趣，也挺有用。还没有读完我就开始念雨果的自学课本，再加到柏利茨学校学全部为20小时的课程。它有惊人的作用。柏利茨学校的办法是决不翻译，马上就从说开始。两三个小时说“这是铅笔”之类后，我的老师开始同我交流个人情况，不久我就得知他刚从秘鲁来此，不会说一句英语。一旦克服恐惧，我就稍许感到自豪。

学完雨果的课本，我买了后来证实确实优秀的老式文法书（拉姆齐）以及几本小说。这些小说大多是译本，诸如马克·吐温的《王子与贫民》，儒勒·凡尔纳的《神秘岛》。1951年早春，我买了灵格风录音带系统地听完。晚春和整个夏季我同私人教师一起干。

卢奇奥·基阿拉维格利奥（Lucio Chiaraviglio）是我的私人教师之一，他是学数学的年青意大利人，几乎一直住在阿根廷。我们达成协议，我教他某些他想弄懂的数学，条件是我用西班牙语讲，他得改正我讲西班牙语中的错误。效果很好——双方都从合作中得益。

另一位私人教师是奥梅罗·卡斯蒂洛（Homero Castillo）（来自哥伦比亚？），芝加哥大学西班牙文学研究生。他乐于合作，而我们的相识导致师生关系稀奇的转变。他当我教师两三年后即我去了乌拉圭并已回芝加哥之后，西班牙语言文学系的一位教授打电话给我，问我能否帮他忙。他的学生奥梅罗·卡斯蒂洛为获得博士学位已完成一切要求，只差最后考试。这时是夏季学季，他系里大多数人都不在，他无法召集到法定人数。考试委员会的成员必须是芝加哥大学教授（我是），哪个系的倒无所谓。由于我认识奥梅罗并懂西班牙文（！），能否请我协助组成考试委员会，主持考试，使奥梅罗能获得学位（此学位是他在紧接着的学季中踏上工作岗位所必需的）。当然啦，有何不可！听起来像是玩笑。我去了，成为法定一员，在考试委员会的真实成员提问（用西班牙语）专门的文学细节时竭力做得看上去很有才智，甚至设法问了一两个问题。我从奥梅罗那里学了西班牙语，现在我要表演得像是他的教师，考考他是否够格当西班牙文教师。

我使恶补西班牙文的每一步都具有强制的彻底的特征。我

以每天5页的缓慢平稳速度读《看图识西文》。我抄下每个词，下一行写下该词的译文。我考问自己，从英文到西班牙文，反过来又从西班牙文到英文，直到完全掌握为止。读雨果和拉姆齐的书时，我做每一道练习，总共要做5次，直到我能完美地做出所有练习为止。我遵从灵格风教程的所有教诲。

随着正式谈判使得我去乌拉圭越来越近于能成，我增加了用于学西班牙语文的时间。一天决不少于2小时，每周7天；平均起来9个月中可能每一天3小时；到最后阶段时我每天有4个小时在说西班牙语。

结果令人满意——并不完美，却能胜任。处于最佳状态时我说西班牙语同欧洲到芝加哥来的一般客座教授说英语差不多。我说的是同一般水平相比，但远不及最好的，不能同詹森或戈尔丁相比，但比譬如可怜的老斯蒂芬·伯克曼（Stefan Bergman）好得多。我的西班牙文水平或许可同拉瓜尔迪亚或马赛尔·黎茨的英文水平相比，或许我稍好些，但好得不多。

我能用西班牙文相当好地上一堂数学课，特别在细心备课情况下更是如此。文法和发音显得并不完美，但不会出现荒唐之至的错误，即席讲授要差一些，但还不至于每堂课都得像正式会议上发表特邀演讲那样需要精心准备。

在蒙得维的亚靠岸一小时后，我发现自己已在一家旅馆里。电话铃响了，这就出现了最难应付的语言问题之一，我几乎惊惶失措，但恶补方法已使我有心理准备去对付。在随后几个月的社交谈话中，我还能跟得上，能理解差不多85%的词汇和几乎全部含意，自己也能说，但不能说得像英语那么好；玩笑总显得相当麻烦，但我设法使自己在社交聚会上不成为累赘。

购物、在饭馆里叫菜或问路都不太难，麻烦在于理解店员、侍者或给我指路的好心过路人说些什么，情况差别极大。有时

没有任何困难，有时会碰上好像嘴里含着馄饨说着汉语的人。在乌拉圭呆了6个月之后，我对公寓里的一个女仆说的话还是摸不着头脑：她是在谈论天气，还是请我准许她打扫房间，或是在告诉我热水器又坏了？许多说多种语言的外国人注意到的规律对我同样适用：最容易理解的是别的外国人；其次是受过教育的当地人。我从未达到说西班牙语是乐趣的境界，我老处于紧张状态，两三个小时后就想回到英语中去。

所有这一切都是很久——超过30年——以前的事了。当然，现在我的西班牙语甚至还没有那时好，不过我仍记得的比例令人吃惊地高。我主要把它归功于恶补方法——做每件事，立即做每件事，用你可能抽出的每一分钟做每件事——这是学习的最好途径。

住宿和伙食

像通常旅行一样，去蒙得维的亚的旅途生活有好也有坏。乘乌拉圭客轮的头等舱在大西洋上消磨了18天是过豪华的假期：华丽的游泳池，奢华的公共活动室，很小但有效安排的房舱，阳光中的甲板扶手椅，几乎每分钟都提供的点心，酒吧里各种各样的开胃小吃和饮料。并非所有经营与此类似的远洋轮的公司都在我最初选择之中；轮船经理用名单称呼让你高兴的劲在30分钟内就会使人厌倦，随着时间增加就会更糟；绝大多数工作人员的态度极明显是为了赚小费，不付小费得到的是无笑服务。有些好些，有些差些，航程表上在里约热内卢要停一天，根据预先安排，我作了一次学术报告，开始了解南美洲组织数学研究的方式。

在蒙得维的亚码头上我们遇见了学校来的三个人（拉瓜尔

迪亚，马塞拉（Massera）以及年青的未来数学家福尔特萨（Forteza），三个亲戚（家母的堂兄弟，已移居那里），大使馆的两位代表，公众事务官员弗朗西斯·赫伦（Francis Herron），从他那里我得到指示，每件事——从深吸一口气到兑现支票——都应由他同意，还有这位官员的助手布兰斯福德（Bransford）小姐。握手寒暄一阵，我们在蒙得维的亚的生活就此开始。

开头不吉利。时当9月底——冬季的末梢，天气很恶劣，阴暗，多雨，冷飕飕（差不多4.5℃）。拉瓜尔迪亚太太带我们去找房子，或者如人人那样建议的，找膳宿公寓。我们研究报纸上的广告，接下来两天里看了大约6处，其中有些地方真吓人。我们看的第一处样板房，楼梯间昏暗肮脏，一进去就闻到一股逗留不去的发霉油脂的臭味，木构件不只是积满灰尘，而且脏污不堪，房间没有窗户，女房东和嘴里吃着橡皮奶头跟着她转的4岁小女孩这个月还没有洗过澡。除了一处外，我们看的所有膳宿公寓都这样。那例外的一处我们当场要下，第二天就搬了进去。

从外面看这座房子凉快干净，里面也凉快干净。我们第一次来到并按门铃时，阳光明亮，我们等着时能瞥见起居室，它宽敞通风，有一点家具——两把安乐椅，一张咖啡茶几，上面摆着一瓶鲜花，墙上挂着两张小风景画，它更像展览室而不是住处。女房东迈耶太太40岁，矮矮胖胖，高高兴兴。她的西班牙语，在我们未经训练的耳朵听起来是完美的，只是到后来我才发现，她的发音、措词和文法都完完全全来自维也纳。她为人随和，招人喜欢，在你没有想到的地方她都尽力让你高兴。

我们的房间挺小，3.6米见方，不过由于高度也是3.6米，所以看上去似乎大一些。家具稀稀拉拉，有一个大衣柜（壁橱是美国的发明）；一把安乐椅，看起来挺舒适，但是靠不住，一

条腿比另外三条腿短，家具都呈淡棕色，擦得锃亮。连接卧室和也是我们私人领域一部分的是一个小门厅，宽度与卧室相同，但只有1.2米长。它同卧室由落地窗隔开，自然，除非天气极冷，我们老让它开着。门厅里放了一张分格桌（我的书桌），一个两层小书架，一张桥牌桌大小的桌子，边上放两张直靠背椅，这间屋就塞满了。门厅两侧从地板上大约一米处，直到天花板，都是临街窗。

我们付给迈耶太太的房租包括伙食费，这是指早餐（大约在7：30或8：00）、主餐（12：30前后开）和晚餐（8：00前或8：00后半小时开）。这种就餐时间是由于女房东和大多数房客都不是乌拉圭人而作的让步。在乌拉圭，更通常的就餐时间是，大约1：30或2：00，量很大的中午主餐，大约9：00或10：00，几乎同量有时甚至量更大的晚餐。在这两餐之间，下午6：00前后，土生土长的乌拉圭人喝茶或享用某些类似的适当饮食。

我们中午在迈耶太太王国的公共餐室进主餐。每个单身房客都有自己的一张小桌，只有我们是一对夫妇，而那里另有一张供一个年纪较大的女士和她的两个中年儿子用的家庭餐桌。我们可以在合理的时间段内的任何我们感到高兴的时刻去进午餐，坐下后就让女仆之一上菜，速度也随我们高兴。除了有人进来发出含糊不清、不大好意思的问候（“Buenas…”——西班牙语“你好”，“guten Tag”——德语“日安”）以及有人离开时发出同样含糊不清地客套（“buen provecho”——西班牙语“祝您胃口好”，“Mahlzeit”——德语“您吃好啦”）之外，实际上没有任何交谈。当一个房客在餐室里同另一个房客说话时——这种情况非常少见，所有别的房客就会惊异地盯着他们，使得他们恨不得没有相互交谈过。当然也没有互相介绍，只是出

于偶然，我们才得知有些食宿者的姓名。

公寓后面有一个小花园，里面摆了一张桌子，几把折叠椅，其中有一把折叠躺椅，还有看起来像有几十只的各种各样大小的年龄的猫。（有一次我数到一条患疥癣的老狗，5只猫，7只小猫。）天气好时（天气好的日子很多），人们可以坐在花园里读书，玩猫，同邻居聊天，编织，打字，或者干他想干的任何别的事情。迈耶太太很可能给你一杯咖啡，如果你呆的时间很长，让她注意到了，她有时甚至会给你一杯啤酒。

这多多少少描绘了公寓里的气氛，我要离开主题说几句关于语言的话。促使我们想住进膳宿公寓的动机之一是它使我们有机会接触人，实习西班牙语。结果却是，西班牙语当然是所有房客的共同语言，而且在紧急情况下他们确实互相用西班牙语通话，但是大多数场合他们却喜欢说德语（绝大多数房客都是维也纳人）、捷克语、匈牙利语、法语或英语。只有女仆，我们一定得对她们说西班牙语。

说到住宿和伙食，至少应当提到食物的数量和质量，在乌拉圭，口号是量多（多得吓人）质中（不怎么样）。

早餐食品量很少，通常有面包卷和咖啡（更精确地说，牛奶咖啡）。通常咖啡是指一小杯很热很浓很苦的不加牛奶的东西，而早餐牛奶咖啡则是普通大小的一杯，一半是通常咖啡，再掺一半热牛奶。喝茶时间也可要一杯牛奶咖啡；如果你在主餐或晚餐后要牛奶咖啡，那你是美国人。

一般乌拉圭人是在大约下午1时或2时坐下来进午餐主餐时才真正开始吸收热量。典型的主餐包括汤、冷盘、鱼、带配料的小菜、甜点和咖啡。汤有满满一大碗，辅以一两个法国小面包。“冷盘”有点像冷切肉，但它不能从字面上解释，它可以是一片厚牛舌或羊舌，也可以是塞有煮得很老的鸡蛋的西红柿，

甚至可以是一盘奶酪调的意大利细面条。鱼这道菜不是非有不可，但习惯上是有的；在我外出就餐自己不点菜（例如赴宴或去人家那里作客）时，总能吃到鱼这道菜。吃完鱼之后就享用小菜，一般是牛肉或羊肉。你的盘子里最常有的是牛排，辅以炸土豆片，一两种蔬菜和沙拉。肉至少会有2.5厘米厚，比你的手掌还大，如果你用两只手都盖不住它，也不用惊奇。如果你挺过了这盘肉，就会面对甜点，很可能是一块蛋糕，有4包香烟那么大，上面有厚厚一层糖桔衣，一大块糖渍菠萝，再淋上加糖的掼奶油。这段时间里你可尽情享用适当的饮料，平常日子是矿泉水或啤酒，正式场合是葡萄酒。甜点后你抿着咖啡，点起香烟，这时你的任务算是完成。

下面你大约在下午6时前后再进食。不管你是不是一个喜欢呆在家里的人，你的茶点大约总是在公共场所，在咖啡馆里享用。最简单的办法是要"套茶点"，然后端上来的东西就得看你在那里而定；你得知道在你挑的特定餐馆里这个神秘的词意味着什么，要不就只能碰运气。很可能你得到的是一壶茶，还有几片烤面包，黄油和果酱，几块甜饼干；如果你运道好，还可以有两片你在主餐时吃过的糕饼，两块或三块小三明治。三明治是一薄片奶酪或一薄片火腿（没有别的种类，奶酪或火腿是固定在三明治定义之中的），夹在两薄片白面包之中。

如果你不要茶而要酒，譬如说要马提尼酒，你必定会意想不到。在第一家馆子里，喝到了大约只有一半或最多三分之二是我习惯喝的马提尼酒；在第二家馆子里，不管你怎么坚持不要掺别的，端上来的还是90%的味美思酒。不过在第三家馆子里，你会得到一份额外奉送的免费便餐。侍者会开始从他托盘里不断在你的桌上卸下小圆盘（大小大约类似于有时上的黄油盘），每盘都有开胃小吃或冷食：奶酪块，土豆沙拉，花生，小

饼干，炸土豆片，等等。所有这些合起来是相当大量的食品，它们都是马提尼酒定义的一部分。如果你点第二份马提尼酒，你就会得到第二份免费便餐，点第三份也一样。

到这时你大约已吸取了为保持健康每日所需热量的两倍，但你还远没有结束。晚上 9 时或 10 时，你得坐下来再吃。我不来描述晚餐吃什么，除了微小改变，晚餐在内容和数量上都会重复你午餐的经历。在几餐之间，你还可从满街转悠的小贩那里买到冰淇淋和热狗，按人均计你比美国人喝进更多的可口可乐，而——令人惊讶！——你的肝有毛病。这个国家人人抱怨肝有毛病。

食物种类不多，质量也非上乘。牛排和糕饼单调地更迭。令人感到奇怪的是，作为肉类出口国，牛排质量却不是最好的。我在乌拉圭吃到过很好的牛排，但都不能和美国中等的饭馆相比，我经常吃到的牛排都很老。我所碰到的烤牛肉都有筋，嚼不烂。有鸡肉和猪肉，但它们属于美味佳肴，很贵，很少能积足够的钱在星期日主餐时吃上。我几乎没有见过别的家禽（鸭、鹅、火鸡、雏鸟）。没有牡蛎；龙虾和虾都很贵，吃上它们是件稀罕事。

我想我可以认真地建议，如果您想吃得好别去乌拉圭。上面我公正地描绘了中产阶级的中等水平，我觉得比中等水平高的人数目极少。我没有进行过很多调查，去寻找那些可爱的意大利小饭馆，那里不消一会就能做出世界上最让人惊异的意大利小方饼，不过就我所见以及所闻（当地人告诉我，如果你想吃得好，去布宜诺斯艾利斯），断言这种小饭馆并不存在，我想不会有错。

天气和气候

乌拉圭的冬季通常始于5月中，延续到9月中。根据报导，1951年冬季反常地温暖，气温在21℃上下。我们于9月24日到达，随后三周的天气比此前整个冬季糟得多，几乎天天下雨，即使出太阳也冷飕飕的。温度表在7℃上下动，经常降到4.5℃，很少升到13℃。如果蒙得维的亚街是7℃，那么我的房间里也是7℃，情况令人难受。

我们卧室里只有3节暖气片，这一点儿暖气片为一个小盥洗室供暖还差不多。由于卧室面积有小盥洗室的两三倍，高度有小盥洗室的一倍半，加之暖气实际上从来不开，情形就很严峻。暖气不开的理由当然是供暖季节已过。9月15日关暖气，天气寒冷不是再开暖气的充足理由。

我在学校里的办公室长宽高都大于我们所住的房间（大于卧室加门厅）。办公室窗户面对大海——美丽的风景，可冷风正是从海上吹来的。建筑是新的（事实上尚未建完），但造得很差劲。当风决定开刮，风真的刮起来时，窗户竟不能使我书桌上的纸不被吹散。这个建筑里没有集中供暖系统，他们想安装，但房子尚未建完钱已花光。解决这个问题的方法就是不去安装供暖管道；因为要是安装的话，在工程最后完成时必须把墙上大部分挖开，要不然就得把管道装在外面。（据我所知，那里现在仍没有集中供暖系统。）每个办公室发了一个电热器，这就认为情况还算不上坏。如果我小心地把腿伸直靠近电热器（不能太近），脚就暖和了（但不是很热），可是不管怎么动，我的手指还是冷的，身体其他部分也是冷的。教室里没有电热器，甚至借一个电热器，教室里也没有一插上就通电的电源插座。在头

几周中，教室里的人，不仅是我，而且还有全部本地人，都穿着大衣。

情况到处一样，在家里冷，在电影院里冷，在饭馆里冷，在我们走访的住宅中也冷。我们觉得不冷的唯一场所是在街上(如果穿得合适并且快步走的话)。外面温度7℃时反倒舒服些。

阴冷潮湿烦人的天气持续了三周稍多一点，到10月中情形开始好转。接着的6周中我们仍感到冷飕飕，但不再是令人难受了。喝下午茶时可以坐在人行道的椅子上，如果那里晒得到阳光的话。在家里我发现已可以不用裹着厚厚的衣服脖子上围着羊毛围巾干活。那段时间白天最高温度在13℃或16℃上下。

夏季来临时令人欢快，它来了而且停留着。12月1日前后，太阳高照，城市改观。海滩上搭建起冲浴室和售货摊，我们卧室里的小电热器也撤了下来，它虽然表现不错，但终究不能解决暖气不起作用的问题。天气令人十分愉快。雨下得极少，再也不觉得冷。温度几乎总在21℃到27℃之间。海上吹来微风，虽有点湿热，但很舒服。那时在芝加哥，我的朋友们正在堆起将近两米高的雪堆。

怎样获得一个教席

前面说过，我在里约热内卢刚逗留一天，便获知南美洲数学组织的难处所在。主要困难还不是数学家的人数低于有效地相互激励所必需的临界数量。这已经够糟了，可是加之还有数学接受的财政、智力和政府的支持、尊重和承认过低。工作岗位数甚至比已经过少的数学家人数还少。

例如，在里约热内卢，利奥波德·纳克宾正在为生计奋斗，尽管他无疑在一千五六百公里范围内是最优秀的数学家。当他

不在证明定理时，他部分时间在巴西物理研究中心工作，并在里约热内卢大学教两门课。然后一线希望之光出现：大学当局宣布数学教席空缺并要求所有候选人前来应聘。实际上该教席在一段时间里一直空着，与之有关的职责则以非正式的暂时认可的方式由一个比利奥波德资历稍高的人承担，而此人在数学方面，抵不上利奥波德的一半。

两个候选人——仅有的两个可能的候选人应聘，即利奥波德和那位暂时占据职位的人。由于每个人(包括T——暂时占据职位者)都清楚，T的就职资格根本没法同利奥波德相比，幕后的议会式的机制开始运作。下面就是其中的一些情况。

利奥波德申请教授职位。除非一个人从该校哲学系获得哲学博士学位，否则就不能据有从而也就不能申请这样的职位。然而，一个人不能，无论如何按T的说法不应当得到这样的学位，除非他从该校哲学系获得了在巴西相当于硕士的学位。利奥波德是从该校工程系获得硕士学位的，结论是：利奥波德的博士学位应当不算，因为他申请和据有教授职位的权利应当撤消。这些事情T都是公开正式说的。

由于这些指控，必须指定一个调查委员会，其任务是对利奥波德的候选人资格作出裁决。奇怪的是，甚至T也不希望委员会裁定反对利奥波德。关键在于当时利奥波德正大获成功，声名鹊起，威力倍增，如果委员会立即决定在两个候选人中指定一位，那利奥波德获胜的可能性极大，大到无法抚慰T。T的办法是玩弄拖延把戏，希望尽可能久地推迟最后决定，同时T就能继续占有教席并竭力争取支持者。如果在某种机会中调查委员会裁定反对利奥波德，那T就可得胜回朝；如果委员会裁定支持利奥波德，那T仍然还有争取最终选举委员会支持的机会——当然，这时指控无效将会是有利于利奥波德的正面因素。

这类官样蠢事消磨时间，要让所有结果出来得花上几个月、几年，在某些方面甚至几十年。最后美德高奏凯歌。第一个委员会全体一致支持利奥波德。稍后选举委员会授予他教席。事实上，30 年后我又去里约热内卢，参加了利奥波德的退休盛典。

人文和自然科学系

当我呆在乌拉圭时，类似于利奥波德·纳克宾申请获得教授职位的可怕故事不会在那里发生，因为那时那里整个国家还没有相当于数学教授的席位。

蒙得维的亚大学与美国的所有大学都极不相同，它的系统更像别人告诉我的欧洲的一所大学。这个大学由 9 或 10 个系组成，粗略地说它的系的意义与芝加哥大学的差不多。例如，它有医学系、工程系、人文和自然科学系、建筑系、化学系、法律系。各系之间完全独立，系也只在预算上依赖政府；它们以自己是自治小实体而自豪。它们的独立性确实是完整的：诸如联合任命这样的事连做梦也没有想到过，不同系的建筑互相隔着好几公里（大学的夸张说法）。经济系的学生去听拉瓜尔迪亚的数学课，比西北大学学经济的普通学生梦想在周一、周三和周五上午 9：30 到芝加哥大学上数学 101 课程还要难。法律上没有联合任命的一个好的方面是事实上它偶而存在：一个人获得两个不同任命是完全可以的。

各系水平差异很大。我被告知医学系和工程系是最好的，后来一致认为人文和自然科学系最差。人文和自然科学系的理想在某种程序上类似于芝加哥大学的学院，它要成为对诸如学位和职业培训这类粗鄙的实利主义东西不感兴趣的系，系里教授和学生教书、学习和研究事物奥秘纯粹是出于热爱这样做。看

来这一理想并不切实可行。例如，就数学而言，该系修改了它的取向，建立了一种人们可以获得的学位，它称为硕士学位，粗略地说类似于美国中西部州立大学的硕士学位。这个学位有什么用，多少有点儿神秘。它的目标不是在高中或初等学院获得教师职位，因为如果是这一目标就得有不同类型的培训。它与成为工程师也同样毫不相干，它似乎单独立在真空中。

人文和自然科学系围绕着大量小教席（人们几乎可以称它为教凳）组织起来：每个教席实际上对应一门课程。如果你有幸在赢得教席的竞争中获胜，那么教相应的课程就能得到中产阶级生活收入的大约20%到25%。(为牢靠起见，最初的聘期只是一年，如果你能证明确能胜任，第二次聘期就是5年，以后各次续聘都以5年为期。从未听说过第一次聘用5年后不予续聘的事——续聘实际上是自动的。）收入不多，但还是有好处的。

心理学家里莫尔迪（Rimoldi）得知我们来自芝加哥，就来拜访我们并成为我们的朋友。他从瑟斯顿大学获得博士学位，他喜欢谈论（主要不是有点想家）在孟德尔大楼和斯坦威杂货店度过的好日子。他就在人文和自然科学系，事实上是该系唯一的专职成员。专职教授在乌拉圭实际上尚未建立，已经见到的则值得怀疑。产生这种情形当然有历史原因。大学创建较晚，而且这些大学都以医学和法律这类比较实用的学科开始。你怎么去找人来到刚创建的大学执教？创建人的答案是，例如，在医学领域，请有成就的开业医生（具有从意大利获得的学位）每周抽出两三小时来讲授解剖学。大学经济拮据，不能支付很高工资；来校授课的医生讲课所得可能只是他收入的无穷小部分。不过应邀成为大学教授者可获无尚光荣，再说，如果把这个头衔印在名片上，对病人也有吸引力。

这种体制的全部不良因素凝聚定形起来，变得永久化了。在我呆在乌拉圭的时候，几乎找不到一个大学教授。你大概会找到一个工程师，他又任教于工程系，或者一个报人，又教一门西班牙文学课，或者一个建筑师，又教着画法几何学。

里莫尔迪告诉我，他的工作条件不可容忍。他需要学生和助手，他需要实验场所和设备，他需要办公场所和设备。人力方面他没有什么可抱怨：他能找到很多有才智的热情的人。其余则毫无希望。校方不仅不会给他实验室和老鼠——所有实验室科学工作人员都为之奋斗的那种东西。麻烦在于他甚至在领取铅笔纸张时都有困难，而诸如为他秘书的办公室申请一个电热器（在冻脚趾头的地方这是必需品）这样的项目也需要类似国会立法的手续。

这里有一则里莫尔迪告诉我的关于人文和自然科学系的趣闻。学校登出广告，说它有一个比较解剖学空缺教席，所有应聘者应来校申请。有几个人来了。文凭经过了审查，通常的手续（相当多）办完，获胜的候选人终于选定。给了他信件和正式任命书，告诉他已可把自己算作该系一员。不久之后，上课即将开始，但没有人告诉这位与众不同的系里新成员职责何在，他到处去找行政机构，询问他应当做什么，何时何地如何领取薪金。噢，天哪！您瞧，出现了不幸的误会，我们想不出来这事怎么会发生，但事实是您被任命的教席——得，您瞧，我们刚刚发现这样的教席并不存在。我们的编制册中没有这一教席，预算中也没有这份钱，全部搞错了。我们真希望您不会介意。

工程系

各系的组织状况很类似，我来描述我所获知的工程系的情

形。

系的行政管理权力掌握在由11个人组成的执行委员会手中，其中4名由系里教员选举，另外4名由国内的专业工程师（可能都毕业于该系）选出，还有2名由学生选出（但本人不是学生，他们通常也是工程师）。这10名选出的委员转而选举一名系主任，如果他们碰巧选出的是这10个人中的一个，则再补充选举一人以填补由此出现的空缺。系主任职位无尚光荣，通常由事业很成功的工程师出任。系主任主持的执行委员会管理全系事务，所有重大举措（特别是所有任命）都由执委会决定。例如，当我在那里时，数学课程的助教职位空缺，由于拉瓜尔迪亚不是委员，他对应当从两个竞逐此位的候选人中任何人绝对没有发言权。这两人中一个是比列加斯（Villegas），系里数学研究室的兼职成员，一个勤奋的学生，另一个是佩特拉卡（Petracca），高中教师，科学上无甚长处。基于资历，工作给了佩特拉卡。

由于系里几乎所有教授（特别是执委会中系里的代表）都是开业工程师，又由于他们大部分收入是在校外挣的（在系里任职是巨大的商业资本），因此事实上没有什么科学团体精神。例如，执委会中无人对提高教授薪金有一丁点儿兴趣，他们上的课一个月最多值5%或10%，对他们不过是小菜一碟。

执委会（包括系里历史上所有执委会）中的工程师在作科学上的决定时受到工程师市场变动的巨大影响。如果工程师短缺，他们就加大压力，使课程放松，使文凭机器加速运转；如果工程师市场呆滞，他们就提高毕业要求。系主任不是搞学术的，因而对大学的连续性没有什么感情，对早先系主任们干了些什么既不知道，也不受其影响，结果是其兴趣几乎是周期性的。系主任任期为4年。因此，每4年一次，刚上任的新官把

所有课程加以改组。到1951年，据拉瓜尔迪亚20年的观察，相继上任的系主任已来回折腾了4次。

学生们对某些日常事务——例如考试行使僵硬的控制。考前教授必须把所有试题及其完整书面答案递交给系主任办公室。如果学生后来认为此次考试过难，“书上没有”，或者基于任何别的考试不公的理由，他们有权向执委会申诉，然后委员会就把出事的教授召去斥责一番。此类事情经常发生。

教授之间根本没有对换讲授课程的事情。当我告诉拉瓜尔迪亚芝加哥大学的安排时，他感到惊讶和羡慕。例如，几何学是由一个工程师讲授给工程师们听的，他当学生时学过这门课，而且除此之外不通晓数学中任何别的分支。像拉瓜尔迪亚这样，有许多人想调换所授课程，但办不到；固定任命的教师既不愿也不能教分析。(顺便提一下，分析意味着高等微积分。)

繁文缛节很可怕。例如，你想请一个短假（不多于3天），你那部门的头（对于我而言是拉瓜尔迪亚）有权批准，但你必须上报学校管理机构，他们再把它作为你应扣的假期记录在案。如果你想休假4至30天，你必须向系主任呈交正式申请，即使申请获准，很可能你的工资也会放假。如果你想休假超过30天，那么必须召开执委会加以讨论，而不发工资则是法定的，你有权享受的有薪假期的总天数是一年不多不少的20日（不是20个工作日，而是总起来20天），可在系主任批准的一段时间里使用。

这方面有一点我尚未讲清楚。由于我呆在那里时还没有专职教授，谈论假期似乎自相矛盾，这里的问题在于在系里还有一些研究室，它们非常接近于系里的部门。研究室的工作与系里教育规划无关，它更像是一个研究规划。例如，数学方面有一个数学研究室，拉瓜尔迪亚是其一员，他还在系里教工程数

学。两项工作是分开的，他得安排在不同时间进行。例如，他下午在研究室上班，那工程数学课就得安排在上午，反之亦然。我所说的假期是研究室假期，不是教师假期。

数学研究室

数学和统计学研究室听起来很冠冕堂皇。工程系的数学研究分支存在本身就是其创建者拉瓜尔迪亚的伟大成就。最初工程系没有数学教研室，只有3个数学教授教工程师们认为必须的标准数学课程。拉瓜尔迪亚想出了成立研究室的主意并使它合法（至少在纸面上）存在。它大约在纸面上停留了10年。官方不认为它存在，系里的预算中没有给它的拨款；它的全部实在意义是拉瓜尔迪亚和马塞拉力图向几个很有前途的年青人灌输数学并开始积聚一些图书。无论是拉瓜尔迪亚还是马塞拉，都没有因他们在这方面花的工夫拿到一文钱。他们作为工程系教授挣到他们的一半薪金，他们又在人文科学系当教授来维持生计，他们为研究室白干。终于在40年代后期，拉瓜尔迪亚说服工程系执委会承认数学研究室并列在预算表上。

数学研究室实际上大约有6间房间，其中之一是主任室，拉瓜尔迪亚老在里面写报告（过期的），做预算计划（两个月前做下一年的）。马塞拉在另一个房间里严格按照预定的时刻表研究数学，很少谈论政治（比任何别人都少，即使在喝咖啡时间也如此）。

第三间是秘书室（我在那里的9个月中从未听到有人叫秘书的名字），第四间属于计算员。既然这样，它就意味着两个留着八字须的年青人掌管两台台式计算机。其中一台在我到那里后不久就不能好好工作，而且为了节约起见，在它退位6个月

之内不会有政府财政加以填补。所以在我呆的大部分日子里，只有一台计算机。鲁伊巴尔（Ruibal）是一个讨人喜欢的、长着孩子脸的年青人，当然是学工程的学生，对数学有一点好奇。他想找部分时间工作，自然研究室计算员之一就找他。对于正在进展中的工程师兼数学家，做计算员是合理的工作，可惜的是没有计算可做。当室里的计算人员为别的搞实际的研究室进行某些计算时，拉瓜尔迪亚常宣扬这个情况（不过即使是他说的也是同一件事）。遗憾的是计算结果同时也由要求计算的研究室通过一个简单的实验得到。除了这一次短暂荣光闪耀外，计算员无事可干。让鲁伊巴尔登记借书证，为图书室的书填写编目条码，而当秘书忙不过来时，就帮忙打字。这不是他该干的，但这是一项工作。

有一间是我的办公室，隔壁一间是研究室的图书室兼作某些年青（学生）成员的办公室。鉴于研究室成立不久又很拮据，如果图书室不怎么好毫不足怪，令人惊讶的倒是它有那么好。甚至在研究室成立之前，工程系图书室里已经有某些经典数学论著以及几种很有声望的老杂志（诸如《克雷尔杂志》，《刘维尔杂志》和《美国数学杂志》）。较新的图书和订的现代杂志直接送到研究室。研究室的图书室中的书架遮盖了相当大的墙面，书架一半都放上了图书。其中有布尔巴基的《数学原理》，美国数学会研究丛书，普林斯顿丛书，以及数学家私人藏书室中经常看到的书籍。一般的美国杂志定期寄来，但有严重短缺。实际上没有过期的资料，在我广为宣传之前，他们没有听说过《太平洋数学杂志》（当时是很新近创刊的）和《数学与物理杂志》（已创刊相当久了）。要进行认真的书目研究是不可能的。

研究室人士

研究室里我瞧见过一次以上的人士总数有11名——它包括教授和学生，但不包括偶而来访一天的杰出学者，利用图书室来学习的工程系学生，秘书，肩上吊着篮子每天在喝咖啡休息时间来兜售椒盐卷饼和面包圈的卖面包小贩以及给地板打腊的短工（不是侮辱性的称呼）。11人中有3名学生，那是拉瓜尔迪亚发现的次等人才——一次他成功地在预算中争取到一小笔奖学金，不管他能否找到合适人选，他反正得花掉这笔钱。11人中也包括福尔特萨和因凡托西（Infantozzi），两人都和蔼可亲，富有才智和文化修养，但都不是（也从未打算成为）搞研究的数学家。在美国，他们可列人杰出的初级学院教师行列中，他们还具有并未完全放弃研读数学的不平常之处，甚至间或还能做些关于诸如满足一个奇特恒等式的环或在其内单元素集为稠密的拓扑空间这样的小研究。福尔特萨始终是让人抱有希望的业余人物，某一天他会读哈塞（H. Hasse）《数论讲义》的前3页，第二天又会读希尔伯特《几何基础》的前3页，而第三天又会读霍布森（E. W. Hobson）《实变函数论》的前3页。

前面说的是11人中的5人。还有两位是阿尔弗雷多·乔内斯（Alfredo Jones）和塞萨雷奥·比列加斯，我同这两位好友接触最多，但只有极小一部分是专业性的。当然还有拉瓜尔迪亚，我肯定把他看作朋友，但同他的业务接触几乎都属于行政事务。

最后但决不是最不重要，有马塞拉、卢梅尔（Lumer）和舍费尔（Schäffer）三位。马塞拉与我同年（1951年时35岁），已是卓有建树、受人尊重的数学家。卢梅尔和舍费尔大约年青15岁，都是雄心勃勃、富有才华的大学生。



J·马塞拉，1960年

马塞拉是一位粗壮汉子，体重轻于一般人，板刷头，头发挺黑但已带灰色，沉默寡言，对我热情友好，虽然他不隐瞒他是当地共产党的活跃分子，但他总能审慎地区分他的政治生活和专业工作。我每天都能在研究室的办公时间（冬季时是下午1：30至6：30）看到他。他比大多数人更多地呆在自己的办公室里（所有办公室都能从所有其他办公室窥视到，这是由于为此目的对窗户进行了巧妙设计），看来他忙于干数学家干的事情。我们在喝茶时谈论天气，他告诉我他去年开的关于希尔伯特空间的课程的内容，并试图让我对他最近研究的微分方程问题感兴趣。他经常对其余人相互求教的问题感兴趣，消失在自己办公室里想一个多小时后，就会带着答案蹦出来。他为自己的论文（挺长）打字；他阅读新近的杂志；他领导一个讨论班；他指导几个学生研究与讨论班上有关的问题。

无论如何，他的思想对研究室的日常生活至少有间接的影

响。由于他信奉的意识形态，他请假一个月去苏联参加一个政治性会议。申请是在不适当的时候——学期中提出的。拉瓜尔迪亚得找人为马塞拉代课，而且还得失去马塞拉的协助来对付室里的日常行政杂务。最糟糕的是，这样一来就会公开地、严重地突出研究室里存在一个十足的共产党人。虽然在乌拉圭共产党人不像在美国那样使人害怕和痛恨，但他们还是十分不受欢迎的，尤其在上层政治官员（诸如凡事都得由他们批准的教育部官员）中。当然，共产党人在美国大使馆、洛克菲勒基金会和其他北美资助机构那里是不受欢迎的。拉瓜尔迪亚感到不快。

贡特尔·卢梅尔生于德国，在法国受过一些早期教育，然后就读于乌拉圭（这里是他的父母发现的远离希特勒的永久避难所）的大学。他说德语和法语如同自己的母语，说西班牙语几乎也是如此。他身材矮小，长着鹰钩鼻，活泼爱笑好动。他的体宽常在正常和近于肥胖间变动，因此需要两整套服装，一套大，一套小。

他的积极的个性甚至在他对数学的态度，甚至还是年青大学生时也能看出。那时他感兴趣的是世界上最重要的问题，而且他还恰恰解出来了——好吧，几乎解出来了，您瞧，只剩那么一小点——在平面上存在使得……的曲线吧？——那么，大大推广一下，在空间中存在使得……的曲面吧？当我遇见他时，他（自己并未意识到）是R·L·穆尔的精神后裔。我把向他显示通向数学广阔世界的窗户作为自己的工作之一。我打开窗户，指明情况，同他争辩；他闭眼抗拒，同我争辩，最后总以皆大欢喜结束。他精力充沛，很有天赋，我是否对他真有好处，并不完全清楚，但我敢肯定不管我做些什么他定会成为数学家。

尤安·舍费尔情形类似，他生于奥地利，在法国呆过一段

时间，能说德语、法语、西班牙语、意大利语和英语，都能说很快的完全熟练的口语。甚至还在当学生时，他就聪明快捷得惊人。当我问他一个问题时，说了一半他就能抓住，回答就会以断断续续的西班牙语倾泻出来。

卢梅尔老犯很多小错误，不断加以改正，通过逐次逼近收敛到真理。舍费尔思维迅速到只要说错一半就能逮住自己的错误，当我还在发愣时他已改正了错误。卢梅尔写的东西整体上颇有条理但细节上杂乱无章；舍费尔写的东西天花乱坠，每块晶粒清澈透明，无可挑剔，但其总体可能貌似威严，却范围狭窄。

这就是这 11 个人很久以前即 1951 年时给我的印象。后来拉瓜尔迪亚去世了。马塞拉成为国会的共产党议员，当政府从瑞士型的委员会-主席制变为极右专制政权后，他被捕并被严刑拷打，在狱中被囚禁了 8 年。乔内斯现在是巴西的受人敬重的代数学家，比列加斯是加拿大的受人敬重的统计学家。卢梅尔在比利时刻苦研究哈代空间，而舍费尔（部分地仍在马塞拉促进之下）在匹茨堡在微分方程方面做了大量工作。在乌拉圭，现在数学研究已经像拉瓜尔迪亚之前那样消亡，或许未来某天它还会复活。

在蒙得维的亚的教学工作

研究室的作息时间随季节变动。在冬季，每个工作日我们得在研究室呆 5 个小时，从下午 1：30 至 6：30，而夏季则从上午 7：30 呆到中午 12：30。夏季时间表的理论根据是夏季下午的天气是热带型的，因此必须在上午做完一天的工作。但前提和结论都不对。

天气虽然暖和，但不是热带型的：从未热到像芝加哥和纽约能达到的程度。至于在上午干活，在我呆在那里时全国的经济系统使这一点不可能做到（此后情况更差而不是更好）。为了过上近于过得去的日子，几乎每个人都得干两份差事。我前面已提到工程学教授是工程师，教授职位等于第二职业，对于医学、建筑和农学教授，情况相同。这种体制很普通，极少的例外是数学、哲学、天文学、拉丁文和经济学教授，在办公时间之外他们很可能是报纸从业人员或保险代理人。非文化科教界也相同：上午开公共汽车的司机下午是侍者，反过来也一样。像这样两个人相互对换一半工作可能会更有效，麻烦更少，这已在考虑之中。在大学里面，学生人数很多，这也使半天中接受教育成为可能，因为夏季和冬季都既有上午课程，也有下午课程。

为使全国性一身二任得以实现，许多重要机构（如银行、政府机关）只开半天。银行冬天下午2时至6时，夏天上午8时至12时开门营业。公共汽车司机在下午开车上午当侍者之间改变；大学里上午的课改到下午，下午的课改到上午。

我必须每天在研究室里呆5个小时，不过做什么几乎完全由我自定。我为讲课（用西班牙语）准备教案（用西班牙文），喝咖啡，同卢梅尔和舍费尔交换问题，在图书室浏览书刊，喝咖啡，看信，看《纽约人》，试图证明一条定理，读统计学论著，喝咖啡。重要的是人在那里。有一天上午卖面包小贩没有来，我竟提议几个人一起上街喝咖啡，不过他们把我的建议看作不得体的玩笑，他们从来没有这样做过。两年后一位乌拉圭朋友到芝加哥来，星期二上午10:30在办公室里找不到我——我呆在家里思考关于代数逻辑的问题，这使他深感震惊：我怎么能在上班时间走开？下个星期日下午2:00他打电话给我，我太太

告诉他我不在家，我正在办公室里干一些编辑方面的事，他完全弄糊涂了：为什么不是上班时间我还要呆在办公室里？

我在研究室的职责受到学生罢课的影响（不过只是表面的），"罢工"是我抵达乌拉圭后在我的西班牙语词汇表中增添的第一个词。罢工就像圣诞节那么普遍，而且在取消工作日方面有效得多：虽然罢工次数较少，但不容忽视且持续较长。公共汽车司机罢工在我抵达后很快就结束了，但一周后又重新开始；煤气工人罢工使我在前3周中用冷水刮脸洗澡；大学生罢课从冬季学期中扣除了5个星期。

所有罢工罢课当然都是政治性的。国会正在就宪法修正案进行辩论，某些人害怕新提案很可能使政府干预比以前更多。反对措施：全国学生团体（多达50 000人）号召进行罢工，实验室和图书馆关闭，上课和考试取消。由于拉瓜尔迪亚的研究室是附加于大学结构之上而不是它的一部分，我们在罢工期间比平常干得更欢——研究室的人有更多时间来室里。

罢工取得某些成果，大学的一些建议收进了新宪法中。但是学校非常需要的财政自治条款未能获得。财政自治意味着停止国会对大学预算应如何分配为工资、基本建设、图书以及其他学校需要花钱的项目加以硬性规定，它能使学校当局在作决定时更有通融余地，例如，他们就能邀请像我这样的客座教授，不用再简直像让国会通过一个法案那样麻烦。为表明反对国会拒绝学校的建议，校务委员会投票表示，决定教授继续罢工。

我的大部分"教学"工作是对研究室里以研究为目标的成员即卢梅尔和舍费尔进行的，拉瓜尔迪亚和马塞拉礼貌地加入听众的行列，其他人，例如福尔特萨和比列加斯有时也参加。听课的人都很有才华，但不熟悉现代数学的语言和处理问题的方式；几乎不等到认识到这一点，随着学期的进展，我不断降低

授课的水平。我设法从算子环（冯诺伊曼代数的当时叫法）开始，接着讲次正规算子，最后以拓扑代数（泛函分析的另一名称）导引结束。这些内容用了29讲。在下学期的16讲中，我揭示了布尔代数的某些奥秘。

由于请我去乌拉圭的部分理由是为该国引进概率论和统计学，所以拉瓜尔迪亚向大约40个认为自己可能会有兴趣的学生发出传阅信函，请他们前来同我相聚并探讨可能的办法。有6个人露面，我们进行了讨论。拉瓜尔迪亚说得最多，竭力试图改变他们的冷漠态度。我在这里；我是专家；他们想不想抓住这个机会，利用我在这里的有利条件，在他们硬性规定的工程学课程中再塞一门课？回答似乎是没精打彩的“不”。他们仍在修读他们的课程。由于罢课，教学日程推迟了两个月，很快就要进入考试时期，他们就会更忙——或许以后吧。拉瓜尔迪亚最后说，好吧，让我们在二月份开这样的课。他们看来轻松多了，还早着呢，这很好。其中有两个后来同我个别交谈，对他们缺乏兴趣表示了一些歉意。他们说，他们真的就是没有时间。他们问我应读些什么，在查询了他们在这方面的基础之后，我提出了两三条建议。我们友好分手。

概率论课真的开了，它是一个简短（16讲）标准的初等课程，有5个正规的学生。在乌拉圭的一学年中，我教学的总时数是70小时，差不多同我在芝加哥一学季通常的教学工作量相同。

在乌拉圭做的研究

我自己的研究继续前进。我想出了关于次正规算子的某些性质并设法取得了一些进展，这一时期做的有谱包含定理，还

有我关于换位子的第一篇论文。

谱包含定理是让我长期操心的一件事。它断言，如果从次正规算子过渡到它的自然拓广即极小正规扩张，则谱会沿“坏的”方向发展，不是增大，而是退缩。让我操心的是在别的方面也有类似的定理（如果从托普利茨算子过渡到它的自然拓广即对应的洛朗算子，则谱也会退缩），我不能相信两者的相似性是偶然的。我曾建议一个博士生试着发现包括上述两条谱定理的一个一般背景，但在想了两三周后，他向我交了一个神学式的证明，说这样的一般背景并不存在，并进而去做别的东西了。此后关于这个论题我听到过一两次含糊其辞的议论（对，这两个结论之间可能有联系，它必定同 C^* 代数的表示论有关；不，这两个结论之间没有什么联系），但我一直不满意。我继续寻求次正规算子理论与托普利茨算子理论之间的相似性并想知道为何会这样。我想，那是E·H·穆尔说的，如果两个主题显示出这样相近的类似性，那必定有能解释这种类似性的推广，而且我认为，除非我们理解这种推广，否则我们其实就没有真正理解两个主题中的任何一个。

算子的换位子本身具有代数意义，而量子力学使它具有更多的意义。海森伯格测不准原理可描述为两个特定的（无界）算子的换位子是恒等算子（PQ－QP＝1）。40年代后期出现了两个不同的有趣证明［一个属于温特纳（Wintner），另一个属于威兰特（Wielandt）］，表明有界算子不可能满足海森伯格方程。于是我问自己，好吧，如果PQ－QP不可能是1，那它能是什么？我老是回到这个题目，收集令人惊讶但为作出结论尚感不足的结果（例如每个算子是两个换位子之和）。优美的结论性的答案是由阿伦·布朗和卡尔·皮尔西（Carl Pearcy）于1965年作出的，他们的深人分析相当复杂，还没有人能加以简化。他

们的结论是，恒等算子的标量倍本质上是仅有的非换位子，而“本质上”此处有其专门意义（“模紧算子”）。

我要提到的在乌拉圭做的最后一项研究与平方根有关。每个复数有平方根；数 0 有点麻烦，为确定起见，你得小心别从黎曼曲面的一叶滑到另一叶，但存在性总是有保证的，对于最自然的“超复数”——元素为复数的方阵，情形不同，但不太吓人。如果一个矩阵不是部分地为零，即如果它非奇异，则它有平方根。自然猜想，对于希尔伯特空间上的有界算子，同样结论成立。我同卢梅尔和舍费尔合作的惊人发现是，上述猜想不对，可逆算子可以没有平方根。问题在于，即使 0 不属于一个算子的谱，它也可能被该谱包围（像圆“包围”圆心那样），因而能使平方根消失。（我们记得，在 $\sqrt{Z}$ 的黎曼曲面上包围 0 是危险的。）

然而，我在乌拉圭那年采取的成为数学界研究的一部分的最大步骤却不是归于蒙得维的亚大学名下的少数几篇论文，而是由拉瓜尔迪亚和我安排的一次会议。我们以 10 月份访问联合国教科文组织在当地的办公室开始，这个办公室由高级官员埃斯塔夫列尔（Establier）主持。他是西班牙人，在法国居住多年，圆脸，身材矮小，细细的八字须，职业国际事务专家，曾在国际联盟工作，一口马德里西班牙语听起来更像书本上说的应当怎么说而不像在蒙得维的亚通常听到的那样。我们不可能在更好的时候来找他。年底临近，埃斯塔夫列尔钱柜里还有一些钱。他迅速抓住了开会这个诱饵、钓线和坠子。对，无论如何让我们开一次会；对，教科文组织会给予资助；我们可这么办。在观察乌拉圭行政人员几周之后，我发现看埃斯塔夫列尔办事令人愉快。他开始谈论出席者姓名，开会日期和地点，一边谈一边记下要点；他理解所有困难，懂得如何绕过难题，知道怎么

把事情做好。

一、会议必须在年底前，例如12月中旬召开。二、会议论题必须尽可能具有普遍性，以便吸引尽可能多的人而不冒犯任何人。三、由我们开列邀请出席会议人员名单，埃斯塔夫列尔保留添加别人的权利，但不会划去任何人。四、为使集会取得最大成效，会议不应在蒙得维的亚市区而应在远离市区80公里左右的某个地点召开，免得出席者用开会时间走亲访友、参观游览。五、埃斯塔夫列尔将支付全部旅费，而由我们去找食宿费支付者（除去他通过同中央政府和市政当局联系帮助我们的那部分外），事实上他保证会弄到我们所需的钱。

埃斯塔夫列尔甚至向我们提出了这次讨论会的论题："经典数学与现代数学"。拉瓜尔迪亚和我皱起眉头，听起来这狂妄得近于荒唐。埃斯塔夫列尔立即表现出外交调和姿态。他提及这个论题，说只需要我们显示最好能具有的广泛的普遍性。我说，改为"数学中尚待解决的问题"怎么样？这个论题像你抓到的那么普遍，并可使出席者用较少时间来准备，而且看来这是帮助我们某些南美洲同事了解当代数学涉及范围的一条良好途径。拉瓜尔迪亚和埃斯塔夫列尔表示同意，会议名称暂时确定。

当然，需要作出的主要决定是出席会议人员的名单：我们应当从何处请何种人？埃斯塔夫列尔的回答干脆明白，他说：邀请任何一位现居拉丁美洲的确实能称之为数学家的人。他需要来自阿根廷和巴西的代表，但也需要来自智利、秘鲁、玻利维亚、巴拉圭以及古巴和墨西哥的代表。我们很快一致同意了十来个名字［包括例如桑塔洛（Santaló），贝波·列维（Beppo Levi），蒙特罗（Monteiro），里卡瓦拉（Ricabarra），卡顿达（Catunda），穆纳甘（Murnaghan）等人］，然后埃斯塔夫列尔和拉瓜尔迪亚就另外30个人名（大多数我以前从未听说过）进行

友好但吵吵嚷嚷的争论，最后安静下来。我的印象是埃斯塔夫列尔更倾向于大名人而非活跃的数学家，这是预料之中的事。

随着日子飞速流逝，人名增添了，计划精密了。科特拉(Cotlar)，考尔德伦 (Calderón)，图兰 (Thullen，在数学家中以其关于多复变函数的研究著称于世，目前是巴拉圭的保险业精算师)，还有戈多弗雷多·加尔西亚 (Godofredo García) 都可能出席；很好，越多越高兴。贡萨莱斯·多明格斯建议在南美洲每年召开一次类似的会议，而这一次议事日程中应包括下一次的计划——很好，联合国教科文组织似乎愿意定期捡起这份账单。

埃斯塔夫列尔的办公室承担了一切繁重的行政事务——安排车辆、住宿、伙食、讲堂、粉笔、扩音器，他们干得很出色。选的地点也很有利，那是埃斯特角城，海岸边的豪华胜地，我们住在舒适的半私用平房里（一人一间，两人合用一个盥洗室和起居室)，在这里可以尽情享受海滩之美并讨论数学问题。

我们预定在下午 4：00 准时从蒙得维的亚乘大客车去埃斯特角城，埃斯塔夫列尔在其正式信函的准时两字下划了着重线，大客车于 5：40 开车。(我搭乘拉瓜尔迪亚的豪华舒适的私人小汽车前往。)公共教育部长被邀请出席会议——这是此类事情的应有之义，必须请他，他必须接受邀请，但他几乎从不出席。他没有来，由于这意味着少听一次正式演讲，所以没有人会在意。

埃斯塔夫列尔办公室班子真的来了，包括他本人，两位副手，三位秘书，而且出席每次会议的每一分钟。其他的人，我们这些数学家，对此感到滑稽，遗憾而且惋惜！这些可怜的行政人员！毫无疑问，他们来是由于埃斯塔夫列尔下了命令。那么他又为什么要来？我们能想出的唯一理由是他不信任我们——如果他不来监视，可能我们会逃学溜到海滩上。由于他这

个“罪过”，由于他坐在那儿有点令人扫兴，带来了它特有的损害，虽然没有人一肚子怨气，但确有些人发出轻微的咯咯声。

有几位预定的演讲人没有来。穆纳甘寄来了一篇文章，是用英文写的；弗鲁赫特（Frucht）做了非常值得称道的工作，他看了5分钟后，用西班牙语做了一个概述。科特拉的文章是用西班牙文写的，由比·卡雷哈（Pi Calleja）逐字逐句逐个符号宣读，后者显然甚至连5分钟的准备都没有，而且对所讨论的主题又不熟悉，结果使人厌烦。此外，这篇文章对于半个小时所能讲的内容来说太长，因为只宣读了引言的一半；科特拉预定置于高峰的耐人寻味的一些结果，可以说受到了热烈欢迎。蒙特罗既没有出席，也没有寄来文章；马塞拉仍在莫斯科，而里卡瓦拉的阿根廷护照出了麻烦。被邀请的6个巴西人中只有纳克宾来了——别人似乎成了行政失误的牺牲品。小道消息工厂加班加点：邀请巴西人的信件没有寄到？寄到了，但太迟了！准时寄到了，但邀请信措词拙劣，以致收信人不把它当作邀请？只要你安排一次会议，总会发生这类事情。埃斯特角城的混乱同别处属于同一类，不过更厉害些。

阿根廷代表团人数众多，他们向我们诉说了他们的图书馆问题。他们已经有三年没有钱买国外期刊，他们同最近研究的唯一接触是《数学评论》。在去埃斯特角城途中呆在蒙得维的亚的很少几个小时里，他们向我们研究室中的杂志猛扑过去，记笔记，抄参考文献。他们中有些德国人仍在打第二次世界大战（在它结束6年之后），他们的战场是《数学评论》（MR）对《数学文摘》（*Zbl*）。德国派路线的口号是：《数学文摘》是真正国际性的，因为它用4种文字而不只是一种文字发表；在《数学文摘》上可以找到所有俄国的资料，它的许多评论员能读俄文，而MR做不到这点；Zbl是不断更新的；美国拒绝《数学文

摘》于1939年提出的合作出版文摘性杂志的建议是怀有敌意，不是出于学术考虑（第二次世界大战爆发于1939年）。

做记录为会议添加了一些有趣的调味品。我们的3位年青成员福尔特萨、卢梅尔和舍费尔负责记录，埃斯塔夫列尔的3位秘书也做这件事，此外有一台钢丝录音机（磁带录音机尚未发明）老在运转。面对这样收集起来的材料，没有人确有把握该怎么办。无论如何，重放钢丝录音机什么也听不见：房间里只有一只功率很低的扩音器，里面坐了25个人，他们咕咕哝哝，互相打断，拖动椅子。职业秘书没有科学方面的经验——外文词汇、专门术语、专有名词以及数学符号在空中飘荡，这把他们完全弄糊涂了。他们英勇地努力奋战，呆到晚上打出草稿送交发言者改正——可是他们的草稿却令人绝望，无法修改。

有一个发噱的错误（容易改正）出现在他们所作的我的发言记录上。我提到一个向量 x 及其在算子 A 递推作用下的象，当然我说“x，Ax，A^2x，等等”。在西班牙口语中，数学语汇 A^2 不读作“A 平方”而读作“A 二”，于是我说的就是“埃基斯，A 埃基斯，A 二埃基斯，等等”。数学家们都在恰当的地方“听见”了逗号——正在他们等着的地方出现。可怜的秘书“听不见”，他们重组了我的音节，打成“xa. xa2，x 等等”。

在我们3位年青人同联合国教科文组织的队伍之间也有裁判权争执，我们年青人的记录虽非逐字逐句但符合发言者的精神而且讲得通。教科文组织不仅拒绝在出版的会议录上使用我们年青人的记录，甚至拒绝把两者加以比较并采取中庸之道。

很多事情出了岔子，有些还是荒唐可笑、令人恼怒的，但从整体上说会议是成功的。会确实开了，人们确实相聚在一起交谈和学习，这是一件好事。

初级间谍

由于我的半官方身份，我同蒙得维的亚美国大使馆官员的接触比一般美国旅游者多一些，仅仅多那么一点儿。除少数例外，我发现这些官员办事效率高，也挺友好。财务处为我填了所有必须的表格，我要做的只是告诉柜台边的好心小姐我花了多少钱，她然后于次日为我准备好钱。有一两次我问文化专员一个问题，他得向华盛顿转述，他很快上报，回答迅速来到。

我第一次向大使馆报告使我开始了一圈握手，其中一只手属于罗伯特·加哈甘（Robert Gahagan），从外表看是一个个儿高高没有什么表情的农场孩子。后来我们在一个鸡尾酒会上再次相遇并聊了几分钟。他问，我能否早点去大使馆看他？我说当然可以，但我感到困惑；他似乎想流露出神秘的间谍气氛。当我去看他时，他保持神秘兮兮一段时间。我知道不知道很快就要在这里举行的数学会议？我是否知道这个会议?！嗨，见鬼！实际上我正在着手这件事。啊哈！那好，那好，那么谁会来？他们都来自那儿！噢，来自许多地方；都来自南美洲，大多数来自阿根廷和巴西，当然也有来自乌拉圭的，不过有一些来自很远处，例如墨西哥和古巴。嗯嗯，那么秘鲁呢？对，当然也有秘鲁。从秘鲁来的是谁？只有一个我知道的人——看来他是秘鲁唯一的数学家，某个名为戈多弗雷多·加尔西亚的人。

看来我们达到了加哈甘的目标，他的间谍行为全在于此。据加哈甘看，老唐·戈多弗雷多是危险的共产党人。他是不是很有可能带什么人来？他到达的**确切**时间、地点？他在这里呆多久（要确切）？他会不会利用我们的会议作为政治宣传的讲坛？谁出的主意邀请他来？谁开的名单？谁能出席？对他的所有问

题，我都作了简短如实的回答，然后带着刚来时同样的困惑离开。

当我马上把这件事告诉拉瓜尔迪亚时，他不光是困惑，他还感到惊讶。(我看不出有什么理由要把此事当成机密，肯定也没有人要我这样做。)他相当了解唐·戈多弗雷多，从未怀疑过他会是共产党，再说，加尔西亚已老了，相当富有，而且是法西斯国家的要人（大学校长，四任院长，等等)，他实在很不可能会是克里姆林宫的代理人。

我也向马歇尔·斯通通报了我同加哈甘的谈话，他回信道：

> 如果唐·戈多弗雷多是共产党，我们还不如立即放弃斗争！当我最近一次于1948年看见他时，他为奥德里亚(Odría)夺得权力的保守革命欣喜若狂，一半时间呆在总统府里围着这位将军转，令人腻烦。……当然，如果任何人有责任猜测谁是法西斯主义者，他倒可以密切注视唐·戈多弗雷多。……如果你有机会马上把它提交给那些侦探，我希望你会这样做。

还发生过另外两三件类似的事情。例如，一次我在美国大使馆同文化专员艾伦（Allen）聊天，他问我一些科学体制方面的问题，我对他在这方面所知甚少感到惊异。他也让我做一点低级间谍的工作。看来有一个学生组织——乌拉圭大学生联合会（FEUU)，它在政治上受到怀疑。(在艾伦描述该组织之前，我从未听说过它。）用艾伦的话，“这班人持第三种立场”——这种用词是指他们既反对美国佬，也反对共党。为了向我说明这个用语的特点，艾伦也把庇隆主义形容为第三种立场。唔，最近有一个美洲国家之间的会议，FEUU 的几个人去里约热内卢

参加这次会议。看来FEUU多半由无政府主义者组成，艾伦很想获悉该组织的内部章程以及去里约热内卢的那些人的姓名——我能做些什么吗？我目瞪口呆，说不出话；我有礼貌地咕哝，说如果这些事情在谈话中自然出现我可以试试打探打探，但我拒绝作出任何保证。

离开艾伦办公室后我很生气。我不认为间谍工作是我的任务。如果国务院要我干这个，那他们本来应当在给我拨款前就说到这一点。我来乌拉圭是想逃避政治迫害歇斯底里，而不是想增添这种气氛。

还有一次艾伦宣称他被告知拉瓜尔迪亚是共产党，问我有何想法。我说我认为这是我所曾听到过的最令人惊奇的胡说八道。

零星回忆

“邀请说是6：00到，我至少得开半小时车到那里”，拉瓜尔迪亚说，“我在5：30接你们。”他却在6：30接我们。又有一次他教我们“乌拉圭时间”表达法（与“美国时间”相对）：约会总迟到，钟表老走慢，拖延积习难改，因而可以预期。“但我不喜欢这样”，他向我们保证，“我曾在北美呆过，知道守时的好处，我约好时间后，总力图准时——只是最后一分钟有重要事情才会迟到。”就像大多数人一样，当局者迷，旁观者清；我同他有多次约会，每次之前总有重要事情在最后一分钟发生。在试着克制几次之后，我设计了一个算法。我决定，“我会在5：30接你”意味着“我在5：30开始淋浴，刮脸，穿衣——我将在6：00到6：30之间来接你”。

乌拉圭工程师在哥伦布纪念日有个习俗，就是设宴相聚，聆

听几个宴会后演说,欢迎最近拿到执照的人加入工程师队伍,然后回家睡大觉。拉瓜尔迪亚替我弄到了一张请柬,但他不能来接我们,因此他向我发出指示。正餐定于下午1:00开始,但开场的味美思酒要早些,他还想把我介绍给几个人并留出时间,至少可以简单聊几句。他说:“就乘出租车,算好时间12:30到,这是合乎习俗的到达时间。”我仔细算了时间于12:40到那里,但一点不晚。事实表明还来早了,大约只有20个人站着,围在一起抽烟聊天。一共有60个位置,被邀的客人最后都来了。拉瓜尔迪亚(他告诉我他得在12:30同我见面)于1:00到达,由于不断有人走进来,我们一直抽烟聊天。两点整我们坐下来开始进餐,四点钟时从桌子边站起来。一切都令人愉快——食品无愧于宴会这个名称,服务快捷有礼,酒杯不断倒满到恰到好处,演说也不冗长。这一切都结束后,我回家倒头大睡,打破了我几乎从来不变的午后喝茶习惯,直到晚餐时都还醒不了。

乌拉圭的很多社交活动都围着家庭转。家庭星期日正餐和圣诞节正餐,婚礼和洗礼,全家到森林或河流去作短途旅行,这都是惯常的事;为仅有的朋友或国外来客举行社交晚会或正餐是稀有的例外。我的大多数“娱乐”是星期日下午开车兜风,或者在饭馆里喝茶,或者看晚上头场电影并接着在饭馆里小小吃喝一番。

诞生和丧葬到处都一样,但人们对付一般日常生活——诸如交通、金钱、艺术、工业等的方式,则依时间、地点不同而有极大变化。

乌拉圭有一项国家法令,规定司机开车经过十字路口前要鸣响喇叭。“别人怎么知道你往那儿开?”那里没有交通信号灯,只有在城里三四处主要交叉口才设有交通警察。让我神经特别紧张的是允许汽车从任何一边超越有轨电车,而有轨电车和公

共汽车只对妇女才停车让她们上，对于男士，会开得慢些，慢到能让（!）他们边跑边上车。不过也得提出另外一面，凌晨3时在镇上走动相当安全——小偷强盗劫匪不存在，或者至少是可以忽略的问题。

有支票活期存款账户，但很少见。工资发现钞，你一个月去一次发给你工资的窗口，就领到一大叠发皱的比索。信贷或更一般的个人商业信贷处于供应短缺状态。

我去看了劳伦斯·奥利维尔（Lawrence Olivier）主演的电影《哈姆雷特》。银幕下方打印了西班牙文，几乎用尽办法减低音量——奥利维尔的声音根本听不见。

到处破破烂烂——整个国家给人以捉襟见肘的衰退印象。没有肮脏不堪或危险的贫民窟，也没有什么出类拔萃的。装有大理石墙的建筑却有油漆剥落的天花板。供应桔子黄油薄饼卷的饭馆里的侍者脸都没有刮，白大褂上有油渍。厕所里老有污水沉积的一丝臭味。上帝以太阳赐福给豪华的海滩，但野草在沙地上生长。做工精良的皮公文包装着次搭扣（上面骄傲地标有"乌拉圭制"），没法使用，当地产首饰上做工粗劣的搭扣要么打不开，要么当你在草地上散步时没有动它就开脱了。

我抱着很大的期望去乌拉圭，有些实现了，有些没有实现。不管在家里还是国外，日常生活中的小烦恼常使生活中的探险、新奇、美丽和难忘的人事蒙上阴影。由于我喜欢回忆过去，期望未来，抱怨两者之间的现在，因此我在乌拉圭享受的乐趣比本来应当享受到的要少。至今我仍深情地想着这个国家，祝愿它一切顺利，它给了我一些东西，我把自己的一部分留在它那里，我高兴，因为我去了那里；我高兴，因为现在我不在那里。

第十一章　传奇般的50年代

回到家里

50年代是芝加哥大学数学系历史上最激动人心、最富有魅力的多产年代。这是我个人的看法，但许多人都持有这种观点，而且它也没有烟消云散。埃克哈特大楼的研究气氛，它那第一流的教授群体，它所具有的很少地方能超过的学生群体，以及它同蒙得维的亚大学懒散平庸正好相反的奋发上进，都令人鼓舞。我满腔热情一头扎了进去。

我再次以讲授拓扑群课程开始。上次讲这门课是在去乌拉圭前一年即1950年秋季学季。自从庞特里亚金（L. S. Pontrjagin）所著《连续群》出版以来，我总要不断地碰碰这个主题，我仍然喜爱这个主题，我真的很喜欢1950年上的这门课。这个班相当大，人员有些变动，最后有34人拿到分数，其中有3个R，还有一个只能得F。班上有许多优秀学生，例如从巴西来的毛里西奥·佩克索托（Mauricio Peixoto）和从苏格兰来的安德鲁·华莱士（Andrew Wallace）。我主要以当时已出版的最好论著之一——安德烈·韦伊的《拓扑群上的积分及其应用》为基础；我甚至要说（即使我不应当说），我干得很好。我特别在期末考试

（带回家做的）考题上下了工夫。由于看一下这些考题可以比任何形容词更好地显示我这门课程的品味，所以我把它们列举于后——请你看一下。你能通得过吗？我想我仍能通过，不过在对某些问题确有把握之前我得再想想。

拓扑群　　试题

下面各题中，"群"这个词意味着"拓扑群"。尽你所能来发现下面这些论断是否为真并证明你的答案。做第n个论断的难度大体是n的递增函数。完整做出7题即可及格；做出10题得良好；做出13题为优等。期望富有创造能力的应试者做出全部15题。试卷应于1950年12月2日（星期六）中午12：00之前交来，否则作废。

1. 到紧群上的一一连续同态是开的。
2. 紧群中两个（哈尔）测度为零的紧集的群积是零测度集。
3. 如果一个群的每个元素（除恒等元外）都至少对应一个在该元素上下取值为1的特征标，则此群是局部紧的。
4. 如果一个局部紧阿贝尔群没有非平凡的闭子群，则此群是有限的。
5. 紧群是有限或不可数的。
6. 任一连通局部紧非平凡群有一非平凡闭不变子群。
7. 如果一个紧阿贝尔群的每个元素都是有限阶的，则其所有元素之阶的集合为有界。
8. 局部紧群是正规的。
9. 如果一个紧群的每个元素（除恒等元外）均为2阶，则

所给群是一些2阶群的（拓扑）笛卡儿积。

10. 每个非平凡阿贝尔群至少有一个非平凡特征标。
11. 如果一个非平凡群的每个元素（除恒等元外）都为2阶，则所给群不是连通的。
12. 从一个局部紧群到另一局部紧群内的可测同态是连续的。
13. 可对希尔伯特空间重新拓扑化使之成为紧群。
14. 每个紧群有一任意小闭不变子群，使得相应的商群是可分的。
15. 任一全不连通紧群是有限群的反极限。

1952年的课程相似但不相同。班比较小［9个学生，包括杰克·费尔德曼（Jack Feldman）和埃德·纳尔逊］，其程度更多地定于研究水平（我给了没有差别的分数——每人都得P），它较少依赖经典教科书而较多使用40年代发表的某些经典论文［诸如拉伊柯夫（D. A. Raikov）的《交换群上的调和分析》，嘉当（H. Cartan）和戈德曼（R. Godement）的《局部紧阿贝尔群上的对偶性和调和分析理论》，塞格尔（I. E. Segal）的《局部紧群的群代数》等］。

从乌拉圭回来后的那些年中，我所看到的聚集在埃克哈特大楼的学生（不仅是听我开的拓扑群课的，而且也有听别的课包括某些相当初等课程的）真是令人高兴。看到他们满腔热情令人高兴，看到他们茁壮成长令人高兴，看到他们不久后就会进入我国最好的活跃的数学家行列令人高兴。在那些日子里我碰到了哈罗德·威多姆（Harold Widom）和雷·斯莫莱安（Ray Smullyan）；差不多同时我碰到了莫·斯赖伯（Moe Schreiber）并开始讨论他的学位论文。唐·奥恩斯坦（Don Ornstein）听了

我开的几门课并开始向我学习遍历理论（但他的学位论文是关于代数的，由卡普兰斯基指导)。他的一般拓扑课学得好，代数课（伽罗瓦理论）学得非常好，复变函数伦学得不怎么好。不介意吧！

说到遍历理论，我在夏季（1955年）开的遍历中碰到了拉里·沃伦（Larry Wallen)，我骄傲地说我在一门普通测度论课程论课程中教了阿鲁斯·利莱维修斯(Arunas Liulevicius)，在一门专门化研读测度论课程中教了约翰·汤普森（John Thompson)。约翰已经把自己同群论坚定地联系在一起，在必要时他只是临时关注一下别的分支或浏览一下来放松片刻。(在后一种情况下，他发现了单向移位算子没有平方根的简单优点的证明。他的证明使尤安·舍费尔和我想出的要了很多计谋的证明得以被取代。)我教史蒂夫·韦恩杰(Steve Wainger)初等代数，他后来成为深刻的分析学家；教吉米·米尔格拉姆(Jimmy Milgram)集合论，他后来是一位领头的拓扑学家；教罗布·柯尔比(Rob Kirby)和鲍勃·索洛维(Bob Solovay)拓扑学，两人中一个干得很好，一个则一般。

回家好。

形式逻辑是数学吗？

我在50年代试图革新逻辑学，我没有成功（还没有！)，但这不是因为缺乏试验。

逻辑总是吸引着我。常识意义下的逻辑是容易的，我不大会犯显然的推理错误，一长串演绎也吓不倒我。当我听到三段论时，我说“这是当然的，显然的”，不觉得学到了什么。关于逻辑第一次引起我内心真正激动的是罗素的通俗著作，然后仅

仅几个星期后是罗素和怀特海的论著：符号逻辑的操作确实有吸引力。(我甚至喜欢这个名称。与“形式逻辑”不同，“符号逻辑”听起来正是我想干的。不知道这些名称的历史怎样。我猜，老式名称是要唤起注意，用代数符号来代替中世纪的冗长烦琐，而引进比较现代的名称是为了强调研究形式而不是研究内容。在感情上我喜欢符号，而且我还赞成用符号作为讨论内容的工具——“思维法则,”而“形式”暗含着我不喜欢的按部就班的标准化步骤。再者，“符号”含有其他东西，符号代表“更高”的东西，而“形式”听起来就像“非形式”的对立面——用僵硬沉闷来代替轻松愉快。可能这都是马后炮，但这是我能对自己的爱好所能作出的最好解释。)

我喜欢符号逻辑就像喜欢代数一样：对灌满黑体字 p 和 q 以及“或”、“非”的字母汤碗加以简化，如同用完全平方解二次方程或用克莱姆法则解线性方程组一样充满乐趣，大有好处。但是，随着我不断前进，形式逻辑学得越来越多，对它的喜爱越来越少。这种反应纯粹是主观的：不是这门学科出了什么毛病，仅仅是我不喜欢。

我不喜欢什么？很难说。这同这门学科的语言以及对它热心之士的态度有关，我觉得大多数数学家以不自觉的、没有系统阐述的方式感到同样的不舒坦。然而，每当我试图向逻辑学家解释我的感觉时，他们却力图向我表明它们不是基于事实。逻辑学家恰恰以与别的数学家相同的方式来进行，他会说：他们精确表述了假设，他们严格进行了推理，从而他们的定理结束。他会坚持，唯一的不同是学科：代替诸如连续性、连通性、同胚和怪球面这样的拓扑概念，他们讨论的是诸如递归、相容性、可判定性和非标准模型这样的逻辑学概念。

不。我的逻辑学家朋友言不及义。代数拓扑在心智方面，同

譬如有机化学或经济学史相比更接近逻辑学——这非常正确。这使得把大学里的逻辑学家安排在数学系中合乎情理——确实如此。但是逻辑与经典的代数-分析-几何类型的“核心数学”之间的差别，至少同逻辑学家据以立论的它们之间的相似性一样巨大。(顺便提一下，“核心数学”是新近发明的要滑头说法，使用这一说法的人认为，通过对“纯粹数学”这个说法表示不满，就能消除纯粹数学与应用数学之间的嫌隙。)

那位逻辑学家论证得好，也会获得很多赞成。毫无疑问，每个数学家都发现哥德尔和科恩关于不可判定命题必定存在以及选择公理与连续统假设相容的成就既富有魅力又令人钦佩。在不那么引人注目的层次上，逻辑学家向我们揭示了皮亚诺公理系统与拉姆齐定理之间的出人意料的关系，这两者毋庸置疑都是“核心数学”的一部分。最后，逻辑学家骄傲地指明了少数数学定理，其首次证明使用了形式逻辑技巧，其中与我的工作最接近的是关于多项式紧算子的不变子空间的伯恩斯坦-鲁宾逊定理。

所有这些都是真的，但它们仍不足以缓解数学家的不满。为什么？部分原因在于，不管逻辑学家的某些成就可能多么令人钦佩，但数学家在其日常工作中并不需要它们，不能使用它们。据我所知，数学定理的所有逻辑证明都不是不可或缺的，它们都能(而且也已)由使用通常数学语言和技巧的证明来替代。关于使用高阶谓词语言的非标准模型的伯恩斯坦-鲁宾逊证明，当艾比［亚拉伯罕·鲁宾逊(Abraham Robinson)的爱称］寄给我预印本时，我实际上必须费力地确定和解读它的数学内涵。是的，我很吃力，但是，没有错，它有其数学内涵并能被解读出。这篇论文并未使我(或任何人?)信服，即非标准模型应当立即放进每个数学家的工具包中，它只表明伯恩斯坦和鲁宾逊是聪

明的数学家，他们能用自己说得很流利的语言来解决困难的数学问题。如果他们用泰卢固语来写这篇论文，我会发现它更难解读，但额外困难只是程序上的而不是种类上的。

既然谈到了这个论题，那么现在正是公开说出我怀疑非标准分析在数学中的作用的时候。这是一个十分敏感的议题：对于某些皈依者，例如皮特·洛布（Pcte Loeb）和埃德·纳尔逊，非标准分析是宗教，如果有人暗示它有缺陷，他们就会生气。对于另外一些反对它的人，例如埃里特·毕晓普，它也同样是易动感情的问题——他们把它看作敬奉魔鬼。对于大多数数学家，它有点让他们犯愁困惑：这里面是否真的有什么东西？我们是否一定得学习它？我的模糊想法是：没错，它里面是有些东西——它是一种语言，对于能够流利运用它的人来说它是研究紧性的一种方便工具。不过，如果我说得对，那事情就仅止于此：它是一种语言，而不是一种思想，这种语言在表达思想方面也过于突出地集中在几个领域。它与戴德金分割多少类似（不够公平），说这个类比不公平是因为戴德金分割集中在甚至更加狭窄的领域中，但这个类比或许能说明我的意思。不，我们不一定非要学它（戴德金分割或非标准分析）不可；它是一个专门工具，极其专门，其他工具能完成它能做的所有事情。这完全是一种品味问题。

至于哥德尔和科恩的引人注目的定理，我们钦佩，但它们并未改变我们的工作，我们的基本思想和我们的生活。如果有人竟然能成功地证明黎曼假设是不可判定的，我们会震惊——如同平行公设被证明是不可判定那样地震惊；但我们会恢复过来。我们或许会进一步发现和研究非黎曼数论，而且从此以后仍快乐地生活。在此之前，当下次学术报告会的主题是二阶谓词演算的应用时，我们会去听讲，有礼貌地尊重对方地去听，但

并不急切，并不充满希望。我们不觉得很可能会学到什么；在最好情况下它使我们高兴，在最坏情况下它使我们担心。当逻辑学家说“这全都一样，这全都是数学”时，我们感到不大牢靠，有点羞愧；我们不知道如何反驳他，但同时我们对所听到的内容不会像听到关于布饶尔群或贝尔函数的演讲那样感到确实可靠。

逻辑学家和（譬如说）调和分析学家，两者都在寻求某类结构，但他们的结构类型在心理学上并不相同。数学家想知道，也必须知道他的主题同数学中其他部分的联系。商群与商空间之间的直觉相似性，至少是有价值的路标，是“数学成熟性”、智慧和经验的组成部分。对这种类似性进行极其细致的考察导致范畴论，有人对范畴论具有如同对待逻辑学同样类型的怀疑，不过程度并不相同。

噢，这里有一条线索：极其细致的考察。逻辑学家对于数学螺帽和螺栓的关注，对于符号和单词（O，+，“或”，“和”）的关注，对于它们之间顺序（∀∃ 或∃∀）的关注，以及对于它们的组成（括号）的关注，对于数学家的震动就像看到诡计多端的论辩一般——并不错误，相当精确，但误导了重点。我觉得这里有一个或许是公正的比方：逻辑学家的工作使现代分析学家震动，就像 ϵ 和 δ 能使傅里叶震动一样。

据说逻辑学在最近200年中跨出的最大一步是证明概念的精确阐述。作为平行的试验，让我推进这个论题：分析学在最近200年中跨出的最大一步是连续性概念的精确阐述。呀，不！我们迂腐的数学家说，两者情形根本不同。ϵ 和 δ 是前进一步，它们能避免许多错误并开辟了新的思想境界，它们能使我们招来比我们所曾梦想过的多得多的连续函数。至于在某种由符合规范的公式构成的合理有限序列意义下的形式证明——什么，

除了证明论自身内的技巧之外，它们为我们干了什么？一个聪明的研究生能教给傅里叶某些新东西，但肯定不会有人宣称他能教给阿基米德更好地推理。

这里有另 一个比方。 一个研究莎士比亚的学者或许想知道莎士比亚的艺术、人物塑造、洞悉内心世界的深度、对于历史的理解以及戏剧构成的技巧；或许另一位想要研究莎士比亚所用的词汇、语法以及明喻、暗喻的运用。让我们假定，两位学者都在正确的学术轨道上前进，使用适当的文献，不跳到没有根据的结论——但我仍然怀疑，在私下两人都会以不大宽容的态度对待对方。一位说，这位文人含糊不清，缺乏学者风范；另一位说，那位语法学家干的是缺乏文化的瞎忙乎。两人都错了吗？这位文人或许会勉强接受，他的同事关于可能的作者和一首有争议的十四行诗的写作日期的考察是有意思的；当然，统计词汇的人知道，如果这对于研究莎士比亚作品没有诗学价值，就不会有人想了解用电子计算机来对莎士比亚的词汇进行统计。两位都对吗？

我说这些不是为了说服任何人相信任何事情；我说这些是试图描绘据我所见许多数学家（包括我本人）对于形式逻辑的反应。这不是对或错的问题。这里涉及的是天生的能力、专业的培育和数学上的品味。事实在于，无论何种理由，绝对否定的反应是不存在的。

布尔逻辑

对逻辑学家称之为命题演算的科目作一阐述会使数学家恼火和困惑。看上去它很像是关于运用括号的一大堆小题大作的讨论，它特别强调字母表并详尽地考虑“变元”（它在任何意义

下都是不变的)。尽管(或者由于?)它具有全套学究式的手段,仍很难看出这一科目真正的内容何在。在谈论命题之间蕴涵的范围内,看起来它所说的一切又很显然。它真具有数学价值吗?

是的,它具有数学价值。如果你不断在图书馆里翻阅,力图学习命题演算,你会发现越来越多的关于布尔代数的参考文献。那是一个优美的学科,具有深刻、艰难和尚未解决的问题;不过,在其与逻辑相关的层次上,它挺容易——几乎是平平常常的。我所找到的最有帮助的书是希尔伯特和阿克曼(W. Ackermann)合著的《理论逻辑学基础》,保罗·罗森布洛姆(Paul Rosenbloom)写的书以及克林尼(S. C. Kleene)所著关于元数学的第一本书,那本大书《元数学导论》光线一点一点地出现。问题:什么是命题演算?答:具有可数无穷个生成元的自由布尔代数理论。

设想你是一个数学家,碰巧不知道什么是群,因此你到一位专家那里问群的定义。再设想这位专家不是告诉你通常的公理,而开始谈论字母的有限序列,从旧序列构成新序列的链算子,以及把许多序列合在一起等价关系。如果专家和你都很有耐心,你或许不一会儿就学到自由群是什么,然后凭借生成元和等价关系,学到任何类型的群是什么。这就是命题演算对布尔代数所做的事情:它艰苦地构造自由布尔代数,然后有时凭借所谓非逻辑公理来揭示如何能同样得到所有其他的布尔代数。

在群(的元素)上设置关系的一个集合实际上与指定一个正规子群并通过它来划分是同一回事。同样情形对布尔代数理论也对:在布尔代数上添加非逻辑公理的一个集合实际上与指定一个布尔理想并通过它来划分是同一回事。(代数学家习惯用理想,但逻辑学家更喜欢与之对偶的滤子概念。在逻辑学中,来

自可证明性的代数研究的滤子实际上比理想更自然，后者同可辩驳性有关。）群论可以看作有序偶（F，N）的研究，其中F是自由群，N是F的正规子群；类似地，一般（不必一定是“纯的”）命题逻辑可以看作一个有序偶（B，I），其中B是自由布尔代数，I是B中的一个理想。

群与布尔代数之间的平行性和类似性，以及命题演算与自由布尔代数通常处理方式之间的平等性和类似性，比上面所说要深远得多。例如，考虑“演绎定理”，它断言蕴涵p⇒q可由一个公理集合推出当且仅当结论q能由把p添加到所给诸公理中得到的扩充集合推出。与上述定理对偶的代数翻译就是：不等式q≤p模-布尔理想为真当且仅当q属于由p连同所给理想生成的理想。另一个例子：逻辑（B，I）是“相容的”，如果I是“小的”（这指I是一个真理想，且不等于B——并非任何命题都可以辩驳）；逻辑（B，I）是“完全的”，如果I是“大的”（这是指I是极大理想——不可辩驳的命题都是可以证明的）。

这些例子中提到的起说明作用的概念是以底代数系统的结构理论来表述的。逻辑学家把它们称为“语法的”概念，也有“语义的”概念，它与表示理论有关。例如，“真假值表”不是别的，正是描述到由两个元素构成的布尔代数中的同态的臃肿但又可以想像的方法，而这又是表示理论与之相似之处：在所研究的代数类中选取最容易的代数，考虑从任何一代数到容易的代数中的同态。（这方面的不平凡的标准例子是局部紧阿贝尔群理论，而“最容易的”群只有一个，即圆周。）代数上与“语义完全性”（每个不可辩驳的命题是可满足的）这个逻辑概念类似的是半单性（每个不等于恒等元的群元素可由某个特征标映射到一个不等于1的数上）。

我发现了许多这样优美、激动人心和富于启发性的类似性，

有些只暗含在我正在热切地研读的书中，我猜出了一些，另有一些我得自己去发现，费力地从一条死胡同跌跌撞撞走向另一条死胡同。我在找一本词典，我相信必定有那样的词典，它能把逻辑学家用的模糊言辞翻译为精确的数学语言。是的，模糊的，至多是勉强的、为此特设的精确。当我问一位逻辑学家什么是变元时，我被告知它仅是一个"字母"或"符号"。这些单词不属于数学家的词汇之中；我发现使用这些单词的解释也无用处——它们是模糊的。当我问"释义"的含意时，回答详尽得使人头昏脑胀（集合，对应，代入，满足公式）。与我后来学到的真假值（同态）相比，这样的回答似乎对我没有用处——勉强的，为此特设的。得知其中的真理是令人兴奋的——开始看出形式逻辑可能只是某些实实在在的数学的平淡相片——它是令人兴奋的挑战。

通向多演代数之路

这一挑战是要发现实实在在的数学，而命题演算及其特殊"应用"样式是其相片——发现对于命题函数，是什么东西起着布尔代数对于命题所起的作用。

如果命题（不管何种命题）是通过布尔代数来干净利落地研究的，说得更彻底，如果命题"实在"只是布尔代数的元素，那么更加神秘的命题函数大概就是取值于布尔代数中的函数。如果"苏格拉底终有一死"是一命题（或更小心地说成表示一个命题的句子，即命题实在是等价类，而该句子是所涉等价类的一个元素），那么命题函数（例如 x 的命题函数）必定多少类似于"x 终有一死"。但它所显示的复杂度还不够大。事实上，如果"苏格拉底死于柏拉图之前"是一命题，那么把"x_1 死于 x_2

之前”看作二元函数，也应当认为是命题函数。在数学语言中，需要三元、四元直至任何有限元的函数——可用元的数目必须是潜无穷的。(我必须始终记住这里要避免使用“变元”这个词，因为它可导致混淆。)

很好，那么典型的命题函数是从一个定义域区(整数集，古希腊哲学家组成的集合，或者任何集合)到布尔代数 B 中的一个函数。不，它还不够一般，它应当是从 X^2 到 B（二元函数），或从 X^3 到 B，或为应付任何情形，从 X^I 到 B（这里 I 是任一指标集，常是无穷集）中的函数。

在这种模型中，什么是“变元”？它不是 X，X^2 或 X^I 的一个元素；它是一个常元（例如 7 或苏格拉底）。逻辑学家在他们写的教科书中不止一次告诉我们变元是什么，但他们缺乏罗素把 2 定义为所有偶的类时所具有的向外扩张的数学勇气。他们代之以使用语言类比，说变元好比代词，在经典的谚语“对于所有 h，如果 h 犹豫，则 h 失败”(有时简练地为“谁犹豫，谁必败”)中，“变元”h 是代词，在简练表述中，它由“谁”代替。

例如，假定 X 是古希腊哲学家构成的一个集合，P 是从 X^2 到适当的布尔代数 B 中的一个函数，此布尔代数定义得使 P（x_1，x_2）具有值“x_1 死于 x_2 之前”。这里使用诸如 x_1，x_2 的符号是数学惯例，但大多数数学家很难确实说出到底 x_1，x_2 是什么。(或许他们会说这是“变元”，但他们很快会承认，他们并不知道这个词指什么。)诸如“使 P 取值于有序偶（苏格拉底，柏拉图）上”这样的教诲不会产生歧义，而且只使用数学上已定义或可定义的术语。这个教诲本来可表述为：“使 P 取值于其第一坐标为苏格拉底而第二坐标为柏拉图的偶上”。等价地可说“使坐标数 1 等于苏格拉底，坐标数 2 等于柏拉图”。也可电报式地但清楚地说成：“使 1 等于苏格拉底，2 等于柏拉图”。在这

里符号“1”和“2”有明确固定的意义，它们是正在使用的指标集 I（= {1，2}）的元素。它们是所涉变元的“名”；那为什么不鼓起勇气说它们是变元？事实上这就是逻辑学家所做的事。当他们说“考虑变元的一个集合 I”时，他们的意思是“考虑一个集合 I，其元素将用作指标，以区别笛卡儿积 X^I 中不同的坐标。

即使在我们同意为研究命题函数，我们应当有变元集 I，定义域 X 和值代数 B，而所研究的对象是从 X^I 到 B 中的函数之后，我们仍然必须决定在这样的函数上何种运算值得加以公理式的抽象。反复查阅逻辑学文献以及数学内省和想像显示出两类重要运算：代入，它把“$x_1 \leqslant x_2$”变换为例如“$x_2 \leqslant x_1$”或甚至“$x_1 \leqslant x_1$”；用量词限定，它把“$x_1 \leqslant x_2$”变换为例如“对某个 x_2，$x_1 \leqslant x_2$”。它们同样重要，但难度并不相同。大多数人对于用量词限定的代数和几何意义不甚了了，因此它比较难。

假定 I= {1，2，3}，X 是实数集，B 是 X^3 的子集 E 的布尔代数［或等价地，形如“$(x_1, x_2, x_3) \in E$”的命题的布尔代数］。为具体起见，假定 E 是闭单位球 $\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2 \leqslant 1\}$，而 p 是对应的命题函数（因而对 X^3 中的每个 x，p(x) 是断言“$x \in E$”，它对某些 x 为真而对另一些 x 为假）。于是“对某个 x_3，p (x)”（它的一种可能的简写是 $\exists_3 p$）是二元命题函数 q，使对 X^2 中任何 (x_1, x_2)，它是断言“对某个 x_3，$(x_1, x_2, x_3) \in E$”。几何上看 p 是（对应于）单位球；几何上 q 是什么？答案是无穷柱体，其中心轴是 x_3 轴，其在 (x_1, x_2) 平面上的截面是单位圆盘。

受到这样一些例子的启示，塔尔斯基及其学派在50年代早期开始研究用量词限定的代数，引进了他们称之为柱形代数的结构。同时在波兰也有人做了类似的工作，有些同塔尔斯基有

联系，有些则是独立的；那时这方面的波兰学派的代表人物是拉西奥瓦（Rasiowa）和西科尔斯基（Sikorski）。可能是出于出版完满的最终完成的成果的考虑，塔尔斯基及其合作者在许多年中几乎没有发表关于柱形代数的论著。如果您想了解他们已完成些什么，可以读1952年《美国数学会通报》上的两篇简短摘要，或者可以继续去伯克利朝圣。我先后做了这两件事。

前面几段所说的某些带有启发性的沉思（关于命题函数以及其上运算的重要性）对于研究之前的某种思考是典型的。当庞特里亚金审察有限阿贝尔群、圆群、直线、环面、向量群、康托尔集以及可由这些群通过直和形成的各种群，子群和商群时，可能也是这样一种思考——这类思考导致他达到“正确”的抽象概念，即局部紧阿贝尔群。啊哈！他可能会那么说，就是它！这必定是正确的一般背景。现在让我们看看在这样的背景下能否确实表述和证明对偶定理。

受到我脱离逻辑学构造实实在在代数的愿望以及能从塔尔斯基的机密中学到的东西的鼓舞，从1953年起，我大约持续了六七年研究多演代数。（再说，这是再次改变研究领域的时候了；六七年后又是另一次改变的时候。）用这个名称是受到出现许多量词运算（诸如$\exists_1$，$\exists_2$和$\exists_3$）的启示，仅出现一种这样的运算的重要特殊情形是单演代数，它是处理亚里士多德三段论的代数手段，而没有这样的运算出现的重要退化情形就是处理形式命题演算的熟知的布尔方法。我的规划雄心勃勃。我想要脱离全部逻辑学构造代数，特别是，我想要理解哥德尔两个著名结果即完全性定理和不完全性定理的代数意义。我成功了吗？

全部逻辑学与全部数学

不，我没有成功地构造脱离全部逻辑学的代数；是，我确实成功地作出了怎样能做到这一点的某些洞察。我仍然认为它能够而且应当做到，而且我希望它将被做到，但不是由我，也不是现在。需要新的想法。就它花费了我生命中6个年头几乎全部工作时间而言，就它可能是我毕生最好的研究而言，这是研究工作，是艰苦的研究工作。

关于存在量词限定的代数公理是简单的，但我花了几个月使它溶化在我的血液中，使我能直觉地、诉诸感情地同样又能仅仅技巧地理解它们。我把它们写在一张小卡片上，把它放进我的皮夹，在我们大家每天浪费掉的许多分钟——约好共进午餐别人迟到的那五分钟，张着大嘴等待牙医师回来的时刻——里，我常常取出这张卡片来看。是不是还有人不知道这些公理？那好：存在量词是一个布尔代数到它自身的一个映射$\exists$，满足

$$\exists\, 0=0,$$

$$p\leqslant\exists\, p,$$

$$\exists\,(p\wedge\exists\, q)=\exists\, p\wedge\exists\, q$$

其中p，q是所给布尔代数的元素。

在那些年里，我生活在代数逻辑中，呼吸在代数逻辑中，哪怕是在系里开会时，在午休时，在音乐会上，当然更在我工作时——坐在书桌后，心不在焉地孤独无援地在一张黄纸上涂写。有一次涂写时，数学思想的统一性再次给我以深刻的印象。我需要澄清一个看来初等的布尔恒等式，但我未能做到；我被难住了，不能看出其中奥秘。没有什么直接的动机，只是为了涂些或想些不同的东西，我从书桌上的书堆里抽出一本书——我

写的关于希尔伯特空间的导引那本小书，我随便地翻阅，我觉得我是随便翻阅。嘿！结果来了：这本书的第58页上有我在代数逻辑方面需要的关于布尔恒等式的奥秘，这是一个初等论证，我原本是会发誓过去从未看见过的。（它证明射影值测度是乘性的。）

招来麻烦最多的定理是《代数逻辑Ⅱ》的高潮。这条定理辨明了所需的公理，是所涉理论预备部分的高潮，它断言激起多演代数定义的模型实际上对于表示与逻辑有关的多演代数已经足够。我还记得我越过最后一道难关的那个晚上，那是芝加哥冷飕飕阴暗烦人的10月里某天晚上9点，我已10十足足坐在书桌后两个小时，把看起来有十来个的概念和技巧集中要弄，战斗、写下，站起来在房间里走动，再坐下，感到泄气但停不下来，感到有一种不可抗拒的力量推我向前。停用纸张和铅笔——我需要改变一下——我需要做些什么——我穿上雨衣，拿起手杖，嘟哝着“我会回来”，出门走向55街密歇根湖边，在56街上折回，到57街又往前走。这时我觉察到了。我的任务完成了。我发觉了我应当做什么，战斗获胜，论证清楚显现，所说定理正确，而且我能给出证明。得庆祝一番。那时差不多已是晚上10点，我刚走过的杂货店正准备打烊。正在下毛毛雨，水坑里映出光线，瞧上去挺美。那家杂货店门口稀稀拉拉摆着些花，正准备收回去，我摸了一下口袋，里面有98分。我问店员我能否用这点钱买些剩下的散花，他咧嘴笑笑，乐意合作。行，它们值一元，但您可少花2分钱把它们买去。我花去了这98分钱，拿了这些花回家送给我太太。身上还是湿的但很高兴，我提议一起喝啤酒以志庆贺。

表示定理是我关于代数逻辑工作的高潮，但并不是结束。表示定理使得把哥德尔完全性定理辨认为多演代数的半单性定理

成为可能，然而哥德尔不完全性定理（这是关于"你永远不能证明所有东西"的著名定理）的代数处理仍待完成。50年代中期差不多我做的每件事都以此为主要目的。已发表的论文（包括《代数逻辑Ⅲ》和《代数逻辑Ⅳ》），从未打算发表的一大堆手稿（《代数逻辑Ⅴ》），共有375页，仍躺在我的资料柜里，博士生［加勒、勒布朗（Le Blanc）、戴格诺尔特（Daigneault）］，讲授课程及其他副产品（例如美国数学会逻辑学夏季短训班以及论述布尔代数的小书），所有这一切的目的，都是力图捕捉哥德尔完美的形式化灵感中的代数内涵。

我知道它在那里，它正等人去发现，而《代数逻辑Ⅴ》扫清了一些下层灌木丛。形式化（类似于自由群的门径）并不重要，问题涉及递归数论。从我的鉴赏品味来说，它是数学中最辉煌的想法之一，也是最烦、最缺乏优美感的想法之一。在《代数逻辑Ⅴ》中，我一直通过"皮亚诺代数"对它加以阐述，皮亚诺代数是多演代数的一种特殊类型，它能反映哥德尔证明的数论技巧特征。这种反映是完满的，证明的每一步都能在每个皮亚诺代数中表达。结论是，可辩驳命题的理想或等价地，自由皮亚诺代数中可证明命题的滤子不是极大的。自然会构造模该理想的商并用泛代数语言描述这个结论。由于习惯上把没有非平凡理想的代数称为"单的"，又由于实际上哥德尔定理陈述了在方才提到的商代数中确实存在非平凡理想，所以哥德尔登峰造极成就的代数表述就是数论不是单的。

多演代数能比数论做得更多：它能"做"（这意味着在所有细节上摹写、摸拟、反映）每种应用谓词演算特别是集合论。有这样的数学家，他们相信全部数学是集合论的逻辑推论，无论如何，这时全部现存数学为真；我是这些人中的一员。转过来，集合论又是策梅洛-弗伦克尔公理系统的逻辑推论。由于用多演

代数语言表述这些公理原则上是容易的，因此由这样的表述明确规定的代数（今后我们把它称为ZF代数），就会是全部现存数学（或许也是全部可以想像的数学）的完满反映。

这里正在发生什么事情？使用数学的通常语言和步骤，涉及的只是带算子群，我定义了一种特定类型的结构——多演代数，而作为这类结构的例子，我碰上了ZF代数。我所得到的一切都能在ZF代数中反映出来，完全地、没有任何遗漏地反映出来；特别地，如果我想要，我就能在这样的代数中讨论带算子群；而且如果我想要，我就能在这样的代数中讨论ZF代数。后者的讨论同前者的关系，恰如同前者同原先建立ZF代数的理论的关系。在ZF代数中讨论的ZF代数，会是所有数学完满反映的完满反映。你看出了桂格麦片匣现象吗？——这个大家熟悉的谷类食匣上有桂格的像，而像中的桂格又拿着桂格麦片匣，匣上又有桂格的像，……它在那里，它或许会让你感到不舒坦——我们是否面临称为“无穷回归”的令人不快的弊病？我不知道。它不让我担心，它不让我害怕，但我承认我看不出这样的场景蕴涵什么。这类无穷回归会出什么错？或者换一种说法，它有什么好？——它是否提供了一种我想觉察的我甚至并不知道的观点？我不知道，不过我确实认为思忖这种现象具有很大的乐趣。

逻辑学学生与逻辑学家

在我的三位逻辑学博士生中，我已提到过第一位加勒（1955年），我是从马歇尔·斯通手里接过这个学生的。他的学生论文研究多演代数与柱形代数之间的关系，揭示两个体系以各自的方式完成了它们打算完成的任务，即分别表示“纯”一阶谓词

演算和具有等式的谓词演算。最后一位是奥伯特·戴格诺尔特，他是我唯一一位其含义有点奇怪的学生，但我很高兴他在某种意义上是我的学生。

我在呆在高等研究院的1957年到1958年那一年里遇见戴格诺尔特，当时他是普林斯顿跟丘奇（A. Church）的研究生。然而，他想做的同丘奇通常的兴趣相去甚远。就这方面而言，他是一位不寻常的博士生——他找到自己论文的论题（与诸如自同构和张量积的代数概念和构造有关）。丘奇愿意资助此学位论文，但对其主题感到不自在，他让我当非正式评阅者和事实上的主审人。我说当然行，当戴格诺尔特的论文写完后，我审读它比通常审读我多年一直关注着他们成长的那些人的论文要仔细得多。这是一篇好论文，比我自己的论文更具纯粹代数精神，我从中学到很多。它并不全是代数，它同哲学逻辑学家和形式逻辑学家的工作有联系。例如，这篇学位论文的成就之一，是把贝思(Beth)关于定义的理论中的一个结果表述为类似于群论中的一个熟知事实：在具有共合的多演代数的自由积中，因子的截面正是共合部分，我印象很深。我写了一篇详尽的评论给丘奇和戴格诺尔特，我能在我学生的名单上添加一名，而且比通常劳累要少些。

有时学生会基于“错误”的理由选择一位博士导师，然后发现自己（或许本人都觉得惊喜）正在做与自己的期望相当不同的事情。这正是在莱翁·勒布朗身上发生的情形。他是我唯一一位实实在在完全属于我自己的逻辑学学生。一次我在蒙特利尔大学作讲演，并被介绍给这位才智横溢的年青人。在该校那年实变函数论班上，他是最好的学生。他喜欢测度论，甚至已发表关于测度论的一篇小文；我是知名测度论专家。因此他问能否到芝加哥大学请我来指导？我说，为什么不，当然可以。

几个月后，他大学毕业，来到芝加哥大学，当然还不能开始做学位论文——还得先学很多数学，读许多课程，达到做论文前的规定。到他准备做论文时，我已不想同测度论发生什么关系——我深深地陷在多演代数研究之中。结果是，莱翁写了一篇关于多演代数的学位论文。变化并不像说的那么突然，他这方面是自愿的。他第一次知道我是作为他在蒙特利尔学的那本书的作者；我们相遇并互有好感后，他开始了解我不同的能力，而我对代数逻辑的兴趣和热爱对他产生了影响。他并非在作牺牲，他已在水流中游泳。此外（正如我常对被指导学生说的），你在学位论文中所写的并不是一纸终身合同。你在你的学位论文上花了两三年，在那些年中你不该试着做别的，但一旦做完后，你可以（而且应当！）做某些别的事情。

莱翁的学位论文讨论的是非齐次多演代数。论文的想法是，把涉及的“变元”集划分为不同的“种类”，以便它们在所研究的结构的不同部分上变化。这样，例如，在皮亚诺算术中，某些变元可为整数使用，而另一些则为整数集使用；在纯二阶逻辑中，就可以有“个体”变元和“函数”变元。莱翁把多演理论的一个实质性部分推广到非齐次代数，在若干年里，他没有去做别的，而是继续在代数逻辑领域进行研究。在他英年早逝（死于脑瘤）之前，他一直在这方面工作并持续不断作出贡献。

我不停地竭力传播我的信条，不仅在我自己的博士生中，而且在我能这样做的任何场合，任何机会。1953年，我在伯克利呆了两个学季，作了关于多演代数的系列讲座。出于某种原因（好奇？礼貌？），格哈特·霍赫希尔德（Gerhard Hochschild）每次必到。同时他正在讲群，我当然是他的最忠实听众之一。稍后，1955年春季，我在芝加哥大学开了代数逻辑课程，考虑到主题的性质，这个班大得出奇——共有17名学生。莫·赫希是

其中之一，他是很有名望的拓扑学家；还有杰克·托伯（Jack Towber），一位代数数论专家，以及迈克·莫利（Mike Morley），这批人中唯一的这方面专家，一位真正的逻辑学家。

那时有许多会议、聚会、学术报告会和研讨会，但这类活动很少是值得珍视的。美国数学会夏季研习班特别有效、特别有声望，我认定如果这类班中有一个关于逻辑学尤其部分地是关于代数逻辑学的，那会是很好的事。这是一个莽撞的决定。我没有逻辑学家的高度水平，我在这方面没有影响，我不是这个领域的圈内人；我所有的只是脸皮厚（乐于不顾一切）和干劲大（乐于做艰苦繁重的准备工作）。我打电话给塔尔斯基，我打电话给克林尼，我打电话给罗塞（Rosser）；我开列名单和主题清单；我写传阅信函，我竭力设计合乎情理的预算，我填写申请报表。这样做很奏效，塔尔斯基、克林尼和罗塞的声望和高水平使事情奏效——但我开始了这件事，我为它的成功感到高兴和自豪。1957年伊萨卡的夏天是一个美妙的夏季。有75至80人参加了那里的夏季研习班，包括迈克尔·拉宾（Michael Rabin）讲有限自动机，哈斯克尔·柯里（Haskell Curry）讲组合逻辑（还有别的?），格奥尔格·克赖塞尔（Georg Kreisel）讲海丁算术的哥德尔解释以及马丁·戴维斯（Martin Davis）和希拉里·普特南（Hilary Putnam）报告他们关于希尔伯特第十问题的联合工作。我讲多演代数（还有别的?），而登在此次研习班文集上的我的报告的简短概述，事实上是我唯一一篇为我关于皮亚诺代数的期望和梦想提供某些技巧线索的已发表的文章。

此文集由下面的“退场赞美诗”作结尾：

如果你觉得你的文章内容空洞，
那就使用一阶函数演算。

然后它就成为逻辑，
似乎要了魔法，
平平常常的东西，
就会受到奇迹显现般的欢呼！

护照事件

50年代中期是我生命中的最好时期，也是我生命中的最糟时期。作为教师和研究文献撰写者，我很好地站住了脚跟；我对自己关于代数逻辑的工作很满意，它使我得到成就感。1956年我到了“四十而不惑”的年纪。我越来越多地卷入为数学界服务的工作中，它很快成为我的工作的主要部分，几乎成为我存在的理由。同时我年青时的过失和干的蠢事老缠着我，实际上让我度日维艰。我的生命并不处于危险之中，我的健康和我的物质生活也都没有问题，但我在心理上比此前和此后任何时期都更烦恼，更没有安全感。

我最显眼的在法律上记录在案的过失是在关于伊斯雷尔·霍尔珀林（Israel Halperin）的某些请愿书上签了名，对联邦调查局对数学资助申请人进行安全审查的权力提出质疑，以及拒绝在乌拉圭当间谍。还有另外一些早些的比较含糊的过失，它们发生在我二十多岁时：我参加了过多的不适当的团体，认识了过多不受欢迎的人物。

伊斯·霍尔珀林现在已是一位老人，甚至比我还老，从多伦多大学退休后，过着平静的生活。他先于我当冯·诺伊曼的助手，终生热烈崇敬冯·诺伊曼。他还是激进的、活跃的、狂热的左翼份子，为此他同加拿大（他的出生地）和美国当局都

发生了严重的麻烦。我同许多别的数学家一起，在关于霍尔珀林的两三个请愿书上签了名。时间是在40年代，我已忘了请愿书具体要求什么，粗略地说，它们同给他以我们所说的公平待遇有关。它们可能是写给加拿大当局要求公正审判的，也可能是写给美国当局要求公正考虑他入境一年的申请，以便他能使用已经获准的研究基金。我几乎不认识他，在此之前我同他只碰过一次（1939年前后，当时他正准备离开普林斯顿而我则刚刚抵达）。我们第二次相遇是在美国数学会于安大略金斯顿召开的1953年夏季会议上。我们交谈了10分钟，聊了冯·诺伊曼和热浪。

至于联邦调查局的安全审查，它同原子能委员会为纯科学研究颁发的研究员基金有关。这些研究人员绝对不能接近机密情报，而且基金说明中明确讲到并不希冀培训结束时他们能成为"原子科学家"。尽管如此，联邦调查局仍被指示对每个可能成为研究人员的人进行忠诚审查。我和我的某些芝加哥大学中的同事觉得这种审查程序是不适当的，我们认为它建立了危险的先例，企图推翻科学研究的传统自由。为表达我的感受，我打印了一篇简短声明（少于200个单词）；紧接着联邦调查局的一个探员来向我询问过一个申请人（我给过他声明副本）的情况。这个声明的要点是，为表示对调查数学方面研究基金申请人的抗议，我拒绝对此类忠诚审查给予合作，"除非情形很清楚，确已涉及机密情报的使用。"

所有这些都是1951年或那一年之前的事，而且除了午餐或喝茶时闲谈外，它只花了我生命中不到一个小时。1952年前，我根本忘了这件事，那时我正忙于准备1954年阿姆斯特丹国际数学家大会。1954年是我离开欧洲的第25年，这25年中我没有回过欧洲。我热切地想去欧洲，去参加大会，在英国呆几个月，

而且很有可能访问匈牙利。

皮特（H. R. Pitt）是诺丁汉大学的一位遍历理论专家，他同我开始就阿姆斯特丹大会后我去该大学访问几个月进行通信联系。1952年秋末我开足了马力，我对无论如何得以实现去诺丁汉大学并且至少在剑桥大学呆短短一段时间进行申请：我申请富布赖特基金，并通过美国数学会向国家科学基金申请旅费资助。我预订了兰达姆轮船的特等客舱，我申请了护照，我谋求皮特的协助，为我找一处大小适合、比较暖和的住处，好让我从1954年9月呆到大约1955年3月。

每件事都获得成功——噢，几乎每件事获得成功。皮特找到了一所房子，他告诉我房子底层火炉的数目，再加二层单独供暖。一年多之前，我从诺丁汉大学得到明确的开价（500镑开销），还有一间办公室以及访问剑桥大学的肯定的（但没有报酬）邀请；我从国家科学基金得到了旅费资助500美元，富布赖特基金会来信说我仍需跨越的障碍只是形式上的。我的姓名已列在他们递交国务院以便最后批准的名单上。我付了出席国际数学家大会的会务费，为我和夫人买了宴会入场券。兰达姆轮定于8月21日启航，而我在5月1日已做好一切准备。

下个星期我辛辛苦苦构筑的世界崩溃了。国务院的信于5月6日收到，信中说我的护照申请被拒绝，理由是“据称你是共产党员”。信里还提到我的权利：我可以要求举行听证会，我可以延聘律师作为代表。

现在我干什么？我能干什么？我当然要求举行听证。两周后的星期五下午，我收到通知听证会将于下星期二在华盛顿举行。按照比我年长的同事的劝告，我同华盛顿一位律师（由芝加哥大学法律顾问推荐）进行了联系，并在电话里尽我所能告诉他关于此案尽可能多的情况。

当我星期二上午到达律师办公室时，他已同护照办公室接触过。他们告诉他反对我的主要因素是不肯同联邦调查局和美国驻乌拉圭大使馆合作。我同律师谈了我的几乎全部生平——我在前面所说的一切，但详细得多，详细得多得多。我还告诉他我愿在宣誓情形下回答任何问题，旧的问题或新的问题，只除去一类问题——我拒绝回答问及我知道或我认为是共产党员的人的姓名的问题。

律师要求听证推迟一天，获得准许。争取到的时间用于咨询。律师在电话中同护照办公室官员谈了几次。我在电话中同芝加哥的同事谈，并当面同国务院代理科学顾问进行了会谈。

在这些咨询的基础上，律师所作的结论是毫不含糊的。他说：(1) 除非我确实提出一些姓名，否则就目前形势以及护照办公室官员的态度看，我肯定拿不到护照。(2) 联邦调查局关于我的档案从法律上说是道听途说。我在听证会上在宣誓情况下所作的陈述会被政府记录在案。这些记录可能迫使政府采取行动，这反过来又会引起那时熟知的广泛公众关注，从而花去我很多时间和金钱。(3) 如果国家的倾向和获得护照的法律规定在几年里有了改变，那么如果不举行听证，我就会处于比现在有利得多的地位。

律师从他的结论提炼出他的建议：取消听证，撤消护照申请，回老家，暂时忘掉去欧洲之事。看来律师的论证（我没有复述他的话，而是用我的话说的）说服了我。我接受了他的建议。我撤消了护照申请，取消在阿姆斯特丹预订的旅馆房间和希望在那里完成的汽车交易，退还国家科学基金会500美元，甚至比以前更专心地研究代数逻辑。

我再也不能重新捕捉到30年前的情绪，由于激动，它们不是理智的。我感到受了伤害，遭到摈弃，我苦恼发火，我愤愤

不平，感到内疚，我并不认为我犯了什么罪。我知道我没有伤害任何人，也没有任何不忠之处。毫无疑问，从同联邦调查局探员的交谈中，我知道他们早已得知他们要我“泄露”的姓名；我拒绝再说出这些姓名是出于骄傲——坚持挽回自尊，孤注一掷——或只是不可救药的固执。

在软弱无力地像是一种对策、一种报复（“让他们等着瞧！”）、一种出路方面，我能采取的唯一行动，我能做的唯一事情就是离开这里到别处去，再次拔出自己的根。我考察了可能性，但在重新看了当年的通信之后，现在我发现我正好喜欢我的第二个根，实在并不急切地想种下第三个根。这是一些同加拿大人的来往书信。我发了大约十来封信，有些给朋友和熟人，有些给不认识的系主任或校长：“我是否可能在贵校供职？”回信各式各样，从礼貌地表示有兴趣到友好热情，结果总是显得有意接纳，但没有提供具体安排；一旦事态平静，我又回到了出发点：个人的痛苦，专业上的雄心壮志以及数学上无言的紧迫感。

这则故事没有高潮，但有结局。岁月流逝，麦卡锡歇斯底里逐渐消失，又到了安排参加1958年爱丁堡国际数学家大会的时候。1957年，根据律师意见，我要求在护照办公室举行听证会——了结此事。事情顺利进行，听证几乎是一场滑稽戏。房间里只有3个人：我的律师，我和一位办护照的官员，他显得稍胖，急于办完公事，好下楼参加护照处的社交聚会。他带着歉意承认，实际上他还没有机会看有关卷宗。好吧，让我们开始，他扫视了我的书面陈述，问了一个法律方面的问题，给了我一张通常的护照申请表：只须填这张表，我们就从这张表往下办。再见。

我问我的律师，到华盛顿来是否很费时间。他说，不，绝

不。办护照的人喜欢您让自己出现在他们面前，他们喜欢这种感觉，即他们本来可以问所有他们想问的问题。

6周之后，我拿到了护照，其间没有碰到任何麻烦。我甚至再次获得了旅费资助！痛苦结束，我重返人类。

服　务

做研究令人激动，护照事件令人沮丧，但是正常的学术事业还是费力缓慢地前进，既不奔向高峰，也不沿着低谷，而是严格地按常规、惯例和传统进行。数学不仅得要思考，也需要管理；文章和书籍不仅得要写作，也需要编辑；学生们不仅得要讲授，也需要指导。我愿意甚至热切地想成为所有这些活动的一个部分。对于日常事务，我从不说不，我在清理学术马厩这方面十分靠得住，于是慢慢地我就一次又一次地手执铁锹。

我为什么接受这些事？任何人为什么接受这些事？含糊不清地谈论良心是乏味的，或许也不能确切描述真正的动机；不过其中确有值得玩味之处，至少有这么多：我们倾向于不赞成这样的超天才（真正的或自封的），他们从不在一个委员会中服务，老是拒绝当评审人，对跟在他们后面的学生一代帮助极少。我们觉得这样不对，而且一旦我们听到自己表达这种看法，在即将来临的日常事务中，我们的火气就可能会小一些。如果——上帝帮忙！——你被证明善于处理日常事务，那你就逃不了。我们都喜欢做我们善于做的事。我们都喜欢完成了某种事情的成就感——这是一种仅仅伴随需要付出汗水的工作才有保证得到的奖励。完成研究必须付出艰辛的劳动，但它也需要灵感，在较小的程序上，教书也是这样。一个系主任、院长或编辑给予大学或专业的“服务”，不需要别的，只需要明智、经验和耐心，

这些品性比起洞察力和独创性来，是我们更有把握具备的。再说，你花的所有这些“不令人感激”的时间通常会获得很多感谢：你在一般人中很有名，自己也感到很重要。有一个不够善意的词或许能概括所有这一切：借口。我们做了这些事就能说——就能理直气壮地说，我们没有时间从事研究、学术和创造性工作。为什么我越来越多地接受需要打扫的马厩？因为我正接近40岁，达到40岁，超过40岁，不管自己是否意识到，我已远没有把握能继续做研究工作。这不是当时我对自己说的话，而是25年后的现在我作的马后炮式的自我心理分析。

“服务”通常是一个好词，但现已变成大学行政管理官员的陈词滥调。如果你有时使用了图书馆或不时发表文章，你就理所当然地成为图书馆使用界或论文出版界的一员。不言而喻，这就意味着你得帮图书馆的忙（例如，留心出版的新书，向图书馆提供采购建议），你得帮期刊出版者的忙（例如当勤勤恳恳、处事周到的审稿人）。对于干这样的事，你不应当指望得到比不时洗个澡或期末上交学生成绩更多的回报。这样的活动就他们本身而言并不是好的，它们只是不可或缺的，不做这些会有灾难性的后果。

“研究、数学和服务”这个口号是废话，这是不成功的学者搪塞拿不出论文的借口。大学之存在是为了创造和传播知识，而不是为了设计、安排、管理考试，不是为了调度上课地点和时间，不是为了保存学生的成绩，甚至也不是为了募集和分配经费。在某种程度上所有这些事情都是必要的，而且我们大家都得做一些这类事情。这是社会服务活动。这些事做不好，我们中许多人负担会更重，这就违反了社会正常利益；但这不是应予奖励的建设性贡献。书教得很差的教师可以在大学里有一席之地，如果他是一个伟大的创造者；第二流研究者也可有一席

之地，如果他是一个伟大的教师；但是一个第二流研究者兼第二流教师不比工友、秘书、预算分析员、拉丁美洲事务主任或行政副校长有更多权利呆在系里。这些人的工作都是必要的，有些无论如何是必需的，但不能因此而把它看成一种升迁，加以抬高或尊崇，并给予过多的报酬。

由于人的时间有限，运道不好，我们必须作出抉择：什么样的服务是我们具备的才能和训练可以提供的？我的选择总是在系一级和专业层次上，尽量避免介于院、校两者之间的层次。我从未进过诸如学院职称评审委员会之类的机构，但我想我曾是系里任何一个可以想像到的委员会委员：图书，学术讨论，研究生培训方针，课程设置，奖学金等等，这里只不过提几项。至于专业方面，我不可能记得美国数学会和美国数学协会中我参加过的所有委员会，即使我记得，也不会有人想知道。部分列举如下：筹备目的在于阅读俄罗斯数学文献的小册子的委员会，为两部会议选择一小时报告人的委员会，关于艺术博士学位的委员会，奖赏委员会，出版问题委员会，以及提名委员会。

幸运的是，“服务”并非“在委员会里工作”的同义语。我发现最有报偿的服务性工作是当导师和编辑。这里“导师”是指指导博士生——或许它不是服务而是教学；这里“编辑”不仅指一般编辑，而且也是审稿人和评论员——是指与数学写作有关的除写作之外的所有事情。

至于博士生，我已提到过我在芝加哥大学收的，但有两名例外。把年代顺序倒过来，他们是卡尔·林德霍尔姆（Carl Linderholm）和莫·施赖伯。我之所以按这个顺序举出这两人是由于尽管卡尔是我在芝加哥带完的（1963年）最后一个学生，但他的工作属于我的遍历理论阶段，它在算子阶段之前很久。卡尔把关于保测度变换的定理推广为关于这样的变换的定理，这

些变换可以改变测度的正值，但在任何（正或反）方向都不改变其零值。他是我在芝加哥大学时的学生，但当我到密歇根大学时也跟我去那里并完成最后一年的工作。这类事情有时需要通过谈判解决。当一个教授改变工作地点，他新去的大学得为他的学生提供（至少暂时地）落脚之地，免得他独自挣扎以至放弃原来的导师。这件事办得挺好。当卡尔正在完成他的学位论文时，我们一起呆在安阿伯；论文完成后不久，卡尔离开安阿伯，而芝加哥大学邀请我回去一个下午，使我能当他的博士论文答辩委员会主席。不久卡尔全家移居外国，这么多年来他一直居住和工作于雷丁。他写了一本书，书名是《数学制造困难》，这是一本妙趣横生、才华横溢的广泛的数学内部笑料书；该书使他闻名遐迩。例如，书中从范畴论观点出发阐述高中三角学。我高度推荐此书。

莫·施赖伯在芝加哥大学作博士论文（1955 年）期间成为我的好友，现在仍是我的好友之一。他给了我论文导师所能得到的少有的深深的惊喜。我建议他研究严格压缩的酉幂膨胀并把它们看作谱不变的：关于压缩，我们能从关于它的酉幂膨胀的了解中得到此压缩的何种信息？当莫第一次踌躇地告诉我答案时，我并不相信。他说，不，所有这些酉幂膨胀都相同。这就是说，它们都酉等价于无穷重数的单向移位。打一个不完全恰当但有些启发性的比方，如果我知道某人一年中有一段时间白天只有五六个小时而在另一段时间有十五六个小时，那么我了解得不多，但我知道一些关于他的事——他住在纬度离赤道很远的地方，离两极之一较近（但不在南极或北极）。然而，如果我知道他一年有 365 天（当然除去闰年），那我根本什么也不知道——他可能住在安克雷奇或加拉加斯。施赖伯定理（很快这一命题就被这样称呼）是说酉幂膨胀给出的谱信息犹如一年

365天这样的信息，它说了些每个人都有的一些事情，但没有说随便哪个人的随便哪件事情。

编 辑

至于编辑工作，它是以小小的步伐渐渐出现在我生活中的。对于为《美国数学会汇刊》打一篇审稿报告，为《美国数学会通报》打一篇书评，或者打一封正式信函，邀请某人为“数学成果”丛书写一本书，不时用上一两个有效的工作小时就行。开始时它几乎不花我多少时间，而现在则占了我大部分工作时间。

这些小小的步伐是要求我审阅的文章和评论的书籍越来越多。50年代中，《美国数学会通报》上有我写的14篇书评，其中只有3篇与泛函分析有关[关于扎南（Zaanen），阿希耶泽尔（Achieser）-格拉斯曼（Glasmann）以及邓福德（Dunford）-施瓦尔茨（J. T. Schwartz）写的书的评论]。其余的几乎涉及全部纯粹数学，包括集合论和逻辑学[对弗伦克尔（Fraenkel），塔尔斯基写的书的评论]，积分论[对布尔巴基和维奥拉（Viola）-皮孔（Picone）写的书的评论]，代数学[对列维（Levi）写的崭新的一年级大学生教本和赫尔姆斯（Hermes）关于塔论的论著的评论]，拓扑学或不如说拓扑动力学[对戈特沙尔克-黑德隆德（Hedlund）写的书的评论]，还有对某些有趣的不属于任一具体分支的著作[例如蒂策（Tietze）的《数学中已解决和未解决的问题；……》和波利亚的《数学与猜想》]的评论。同时我经常为《数学评论》写稿（我得能得到削价预订），也偶而为统计学和逻辑学杂志写评论。由于这些，我收到了某些追星族的来信以及无论如何应当说是与之相反的信件（说是“可憎来信”又过份）。我责怪弗伦克尔使用冗长过时的记号，他

来信表示不满并为自己辩护。我们通了两三封信然后友好分手，他最后一封信的结尾是"我亟望同您在阿姆斯特丹相遇"。艾比·鲁宾逊觉得，在我为《符号逻辑杂志》写的书评中，对他的肯定不够并告诉我这种想法，但后来他写了一封友善的信，信中说："由于我相信我在罗切斯特对你表示不满，认为你在发表于《符号逻辑杂志》上对于我所著《理想的元数学理论》的评论未能考虑该书的后面一些部分，因此对你在《数学评论》上发表的关于"完全理论"的完整报导，我现在应当表示感谢，这样才算公平。"

真正的编辑工作是在1958年开始的。那年我接替角谷静夫当《美国数学会会报》的编辑，另外还有3位编辑，他们是拉尔夫·博亚斯、欧文·卡普兰斯基和汉斯·萨梅尔森。我们按领域分工，我负责实分析和泛函分析（后者由卡普兰斯基大力协助）以及"其他领域"，这主要意味着概率论、逻辑学还有数论领域的某些怪文章。

我习惯于打字，无论是文章、书籍、信函还是提纲；除偶而的额外工作（需要油印并大量分发的试卷或讲稿）外，我几乎从来不用秘书。当我做了编辑后，这样自由自在的日子一去不返了。从那时以来（最近25年），我得有秘书帮我完成任务——我既赞美又咀咒这一切开始的那一天。一个好秘书可以大有帮助，但用一个秘书帮忙既节约时间，也耗费时间。你得预先组织好并解释应当怎么做；你不仅得按自己的念头、偏爱、病痛、假期以及其他冲突来调整优先次序和时间安排，而且还得按别人的这些情形来调整，而且你老有压力，不知所给任务是重是轻。贝弗利能在周五前干完这些吗？我给杰尼尔的活是否太多了，我是否得为她要一个半工半读的人来帮忙？我给卡伦的活是否太少了？——什么也不做使人泄气，而把她的部分时

间借给同事又树立了一个危险的、可能会无可补救的先例。开始时是十分之一时间的秘书（1周10个工作半日，其中有1个工作半日有足够工作），现在我已达到通常需要十分之十一时间的秘书，除去因没有什么稿子交来或没有什么信件需要答复而造成的出乎意料的缓和时段，这时我们就拼命整理卷宗。

在我当《美国数学会会报》编辑的1958—1963那6年（按传统每人干两个3年），我记得每年似乎要处理120篇上下的论文，其中发表的约有50篇。工作相当公平地分配给四个编辑。我们中有一人是总编辑（轮流坐庄），但除少量同美国数学会普罗维登斯办公室的官方通信外，他不比别人干得多。我们分头独立自主，每人自己决定采纳什么，拒发什么，对我们的决定没有上诉。

有一年正好是我当总编辑，我的例行职责之一是汇集年度统计。每月收到论文的平均数，采纳论文的平均数，估计页数——需要做的就是这类事情，我恪尽职守，写给每个编辑，请他们告知有关材料。埃尔登·戴尔（Eldon Dyer）那年是编辑，他回答得很认真。他交给我一张表，分为12行，从1至12指明月份，并适当地划出论文数、采纳数、页数等各列。在每列底下，他写上该列数字之和及其平均数，包括（非常肯帮忙！）第一行。我得知那一年月份之和（1+…+12）是78，其平均数为6.5。

那些年中“会报”大约每年出1000页，因此平均每位编辑每年负责250页。我大致浏览了80年代的一些“会报”，每年页数已多过我那时的两倍——1981年是2160页，而编辑数也已增至18。这就能算出每个编辑每年负责120页，这正好证明世界正在变糟。年青一代正在变弱。

怎样成为要人

问题：你怎样才能成为一个要人，成为美国数学会和美国数学协会上层圈内的人？答案：弄清规则**并干某件事情**。

“弄清规则”，我的意思并非指今天就清楚一切，并“刻意模仿反动的当权派”；我仅仅是指弄清规划。弄清何时何地开会，宣布的会议目的为何，实际上会议又如何进行，弄清摆在桌面上的组织——谁负责？决定如何作出？如果你弄清了规则，就比较容易改变或打破规则。就我的情形而言，我猜想（仅仅是猜想）我第一次被随便地提名进入理事会（1950年）是由于我处于困难之中——我试图改变或打破组织坎布里奇国际数学家大会的规则。

“干某件事情”，我是指干某件，干任何一件真正的、实实在在的专业方面的事情。写论文或写书并参加数学会的会议，同兴趣相似的人们聊数学，教课、拟订教学大纲、写书并参加数学协会的会议，同兴趣相似的人们聊天，提出并解决初等问题，为学生和教师组织讨论班并参加有关会议，同兴趣相似的人们交谈。始终同专业保持联系。

当我获得博士学位后10年中开始做这些事情时，我甚至没有意识到我正在做这种事。由于我想同兴趣相似的人们交谈，我每年参加两个大会（支付份内的费用），两次会议之间，我写数学长信给任何一位愿意收集、愿意回信的人。我迷住了数学这一行，热切地要了解它如何运作。当我被首次指定成为美国数学会一个委员会（关于阅读俄国数学文献的小册子）的成员时，我32岁，现在看来是老了；在世界范围内，未来的系主任或院长在25岁左右就已开始谋求并获得此类职位。我之所以被指定

为该委员会一员，是由于我前些年花了许许多多时间学习数学俄语，而且我在会议上老同偶然碰见的兴趣相似的人讨论阅读俄国数学文献之事。一旦这样的话传开（“哈尔莫斯上星期才问过我这类事情”），跨出正式一步几乎是自动的了（“哈尔莫斯怎么样？为什么我们不让他参加?”）。

年青人很少认识到（我当时肯定也一样），老一代是怎样意识到他们的存在，老一代多么想让他们帮忙来推动机制的运转。它不是一个排外的密谋（“我们在这里，得让他们老呆在外边”），而是一种诱拐式的计谋（“逮住他们，促使他们干活”）。当我年青被逮住时，我感到惊喜，现在我位于另一端，逮住别人是我最艰巨的任务。作为一套丛书的编辑，我的工作不是拒绝递交上来的书，而是邀请和鼓励人们写书；书来得越多，我的成就越大（而且我的进账也越大——对此我不用回避）。作为杂志的编辑，我最艰巨的工作是从现已由于其能力就能被辨识出来并愿意当评论员和审稿者的人中寻找未来的编辑。

我认识一些人，他们处于圈外但老问怎样才能进入圈内。人们极其想进去，但在这方面做得非常不好。他们不尽力去弄清规则，而在进入圈子方面他们做的唯一“事情”就是想进去。

当我成为美国数学会理事会理事后，我出席它的会议；我严肃对待，参加进去。在某种程序上，它很有乐趣，但决不单是乐趣——会可能开得很长（午夜后才休会不是没有听说过），可能极其烦人。我出席的早先几次会议是小型的（12 至 15 人），此后人数不断增加，现已达到五六十人或更多些。会议室里某些人是作陪职员（美国数学会执行主任，《数学评论》执行编辑，秘书，各种财务和出版专家），但大多数人去那里正是为了讨论。理事会的公开陈述出来的目的是确定科学方针（董事会掌握钱袋），但在最后 20 年，关于会议、学术丛书和杂志等作出决定

只处于可怜的第二位，第一位让给忠诚于特殊利益的团体强烈发出社会性、政治性声音。美国数学会在其存在的大部分时间里是一家出版公司，一个召集会议的机构，在不断增长的程序上，它成为一家职业介绍所；现在的倾向是把它推向成为工会，财政活动集团（从国家科学基金会榨取我们所能榨到的一切），关心反对歧视黑人或妇女问题的民权团体，向南非种族隔离和苏联反犹政策开战的政治活动委员会。

看来经验表明，而且看来也很有道理，美国数学会不能有效地成为所有这些。当然，同一个人能既喜欢高质量的出版物，又急于拿到夏季津贴，同时还反对反犹主义。然而，一个人似乎不大会既具有成为好编辑的科学判断力，又具有成为成果丰富的院外活动者的政治知识和能力，而且还具有成为卓有成效的积极活动家的精力、热情和魅力。

当美国数学会还年青，对于数学具有理想主义色彩的热情时，要找它的工作人员问题不大。数学会只关心科学问题；归属于数学会并为其工作的唯一理由是献身数学。提名委员会竭力把崭露头角的人吸收进数学会活动中来，这些人应显示出远大的数学判断前途和巨大的工作愿望。还要作些努力以避免明显的不平衡，例如代数学家过多或加利福尼亚人过多，但对于性别、种族、年龄、宗教、职级、收入或政治热情，则不必注意。随着侧重点的改变，程序也有变化。现在候选人把自己提供给选举人，而且以各种奇怪的纲领，诸如取消终身职位或消灭失业等来竞选。

新的程序是否更民主？表面上说，回答是肯定的，但其证明有漏洞。问题在于，在数学会大约20 000名会员中，通常参加选举的比例少于15%，这意味着一个能使100张选票改变的坚定的写信者就能影响竞选各方所得的结局。数学会新的关注

点是否更恰当，更可取？回答依赖于你问什么人。

不过关于哲理思考到此已足够了。我还想说一点关于理事会的程序。50年代初我是理事会一员，几年后，1957年，我又被提名并被选入理事会。1958年我成为《美国数学会会报》编辑，担任这一工作的人自动成为理事会理事，因此在一段时间里我以两种资格进入理事会。这类双重理事并不罕见，但它能导致混乱。埃弗雷德·皮彻（Everett Pitcher）于1967年担任美国数学会书记，次年他发现了最有趣（以及最有数学意义）的混乱。他写了一个备忘录给理事会，部分内容如下。

> 或许只有一批数学家才能建立含有数学圈套的内部章程，但在我会会章第四条第四款中，我想我们正是做了这样的事。我来引述第四款如下。
>
> "第四款。理事会所有理事均为投票人。理事会任何会议决定事项均以出席者所投票之多数为准。如果投票结果受到质疑，则由主持会议人决定以点名方式确定实在票数。在点名投票中，理事会每一成员只能投票一次（尽管该员可能以几种资格成为理事），且在投票前应说明以何种资格投票。四个副书记组成的小组得有一票，此票由作为副书记投票者均分。八个出版委员会得各有一票，此票由相应的出版委员会成员均分。理事会其余理事均各有一票。投票后计算分数值票数。"
>
> 假定有遵守上述第四款组成的理事会，那么这个规划就会有两个奇怪的特征。在下列每种情形中，理事会在候选人α和β中作抉择。
>
> 例1。为赢得他的愿望，理事不必宣布自己是使他得以产生最大票数的委员会的成员。

设理事会组成为

A 委员会	B 委员会	C 委员会
x	x	c_1
a_2	b_2	c_2
a_3	b_3	c_3
	b_4	c_4
		c_5

x 希望 α 当选。他知道 a_2，a_3，c_1，c_2，会选 α，b_2，b_3，b_4，c_3，c_4，c_5 会选 β。此时 x 宣布自己以 B 委员会一员投票，这样他会成功，但得的是 1/4 票。如果他以 A 委员会一员投票，得的是 1/3 票，但 β 会当选。

例 2，投票人宣布他们投票资格的次序会影响最后结果。

设理事会组成为

A 委员会	B 委员会	C 委员会	理事
x	x	c_1	d
y	y	c_2	
a	b	c_3	
		c_4	
		c_5	

a，b，c_1，c_2 选 α，c_3，c_4，c_5，d 选 β。假定 x 希望 α 获胜而 y 希望 β 获胜。如果 x，y 宣布属于同一委员会，则 α 获胜，而如果 x，y 宣布属于不同的委员会，则 β 获胜。这就是说，x，y 两人中谁后宣布投票资格，就能使自己的中意者获胜。

例 2 表明投票规则可能是不稳定的。因为在点名投票

中，在总票数记录下来之前，每个人可改变其所选对象；此例中投票人x，y可轮流改变所选对象从而导致混乱。我怀疑罗伯特考虑到了这种情形。

怎样当编辑

随着岁月推移，我卷人的编辑工作也与日俱增。在由马歇尔·斯通主编、由范诺斯特兰德出版社出版的“大学高等数学丛书”中，我写了一本书。此后我成为该社出版的“大学生数学丛书”的两主编之一，另一位是J·L·凯利。再后来，弗雷德·盖林（Fred Gehring）同我合编了范诺斯特兰德平装丛书，我又同施普林格出版社有了联系，成为它出版的久负盛名的数学成就丛书编者之一。

一个丛书编辑怎样谋生？他是否手持红铅笔，审读稿子，寻找打错的逗号和分裂不定式？不，先生，100万年里都不会这样！出版社关心的是他能作为宣传者和顾问，他以此从出版社那里挣饭吃。

至于宣传者，作为几本相当成功的书（关于测度、关于向量空间和关于算子的书）再加大量篇幅适中的研究论文的作者，我已知名于世，而这对于范诺斯特兰德出版社以及后来对于施普林格出版社都已足够。我有时想其中意义何在？如果你写了一本书，正在找出版社，你是否觉得成功的、享有盛名的主编的姓名会使你的书失去光彩但能帮你的书销得更好？无论如何，出版社相信这种办法有作用。至于做出版社的顾问，丛书编辑的主要工作不太是直接建议，即不像审稿人对杂志编辑所作的那种建议（尽管也有这样的成份），他主要把时间花在寻找、征

求、接收、采纳或拒绝书稿上。

范诺斯特兰德平装丛书是我多年一直力图使之开张的那类书籍。我希望美国也有类似于德格鲁特出版社在德国以“袖珍丛书”(Sammlung Göschen)的总标题出版的许多绝妙小书。克诺普关于复变函数的小书就收在该丛书中，还有哈塞关于“高等”代数的书以及许多其他的书。这些书比杂货店架子上摆的最小的书还小些（比大书要小得多），而且不超半吋（1.27 厘米）厚。这些书很容易收进大多数口袋里，印刷精美，装订牢固，许多书阐释质量很高。我发现手里拿着这类书心情愉快，它们吸引我去阅读，所有这些因素综合在一起，又使它们容易学到手。再说，旅行时把这种书包在行李里最为理想。当你在公共汽车里一手拉着吊带而又想读些什么时，它们也很方便。

没有一家出版社听得进我关于“袖珍丛书”的宣传，但范诺斯特兰德出版社听进了我对盛行油印笔记不能解决问题的反宣传。该社散发了我写的题为“关于笔记的笔记……”的宣传小册子，而到 60 年代初期，平装的“范诺斯特兰德数学书房”终于开张。下面引述的是该宣传小册子的前两页。

> 在过去 10 到 15 年里，一大部分数学交流是通过“笔记”进行的。这个对情况描述并不很足够的词已经成为相当专门的用语，通常是把 75 至 300 页不等的油印散页用订书钉松松垮垮订起来，印制粗糙，口头宣传，售价低廉，很快脱销。结果是人人都不满意。数学系抱怨它们被牵进了出版事务之中；系秘书抱怨工作负担过重；作者发现他干了出书工作的一半，可是只有很少一部分得到承认，而且也没有报酬；读者得同易于损坏的材料奋战，难于卒读。非正式发行的有害后果是形成了由有机会接触关于某个主题

的所有现行笔记的人们组成的小集团；偏僻的学术机构里孤独的学者以及他们的学生经常无缘得知某些笔记的内容，甚至无缘得知存在这样的笔记。

尽管这种方式有诸多缺点，但仍有延续下去的道理。道理之一是这些笔记提供了介于研究杂志与已出版的书籍之间的某种方便的发表媒介。在笔记里，我们可以发现以现代观点阐述的经典素材，近来飞速发展的数学领域的重要概览，"众所周知"但实际上很难弄到的民间流传的材料。道理之二是这些笔记的作者或许不愿意写一本成熟的书并承担相应的职责（正式成书，白纸黑字，结果沉重），但很想迅速写出一些明显是非正式的、存在时间可能很短暂的东西，作为试探气球。这种方式还有另一个优点，就是快速：一系列笔记可以迅速复制并在其内容仍未过时时加以阅读。

"范诺斯特兰德数学书房"力图保留笔记方式的优点但克服它的缺点。这一尝试相当成功。在其最流行的书中，有林登(Lyndon)的《逻辑学笔记》，麦基(Mackey)的复变函数讲义，以及陈省身的《复流形》。这套书不断出版，直到范诺斯特兰德出版社开始被收购、组成集团以后又重新被收购为止，此后它如同范诺斯特兰德出版的别的数学好书一样，平静地消亡。

当盖林和我开始为施普林格出版社筹划一套更初等的丛书时，我们写信给我们认为能成为优秀作者的人（数量相当多，我记得一次寄出大约100封）。信的开头如下："亲爱的某某人：您最近正在写什么好书吗？您知道谁最近正在写什么好书吗？我们是一套新丛书——由施普林格出版社出版的"大学数学教材"的主编，我们很想出版高水平的、又在最近这些年中为出

版社避开的书籍。”

“数学及其相关领域之成果”是施普林格出版社长期出版的黄皮丛书之一。“数学科学基础教学专著”是大黄皮丛书，而“成果”是小黄皮丛书。“基础教学专著”中的书可以是篇幅巨大、浩翰不朽的论著，学术精深，无所不包，具有吓人的参考文献；“成果”中的书则试图简短，完美，论题专门且集中，可以作为适时的研究工具。在我心日中，“基础教学专著”的作者胡子灰白，接近他职业生涯的终点，为他最近40年中认识到的东西作一总结；而“成果”的作者还年青，可以肯定不再“出去”，而是新近“进来”的一位志士仁人，热衷于传播数学新思想，建立学派。当我的名字开始出现在“成果”丛书扉页底下(起先是十来个顾问之一，后来是3个编辑决策委员会委员)时，指定由我负责实变函数（其解释很自由)。

我们国家的商业出版社总是寻求、鼓励、培育新手稿，不过无论如何，它们出版的绝大多数书籍是抱有希望的作者主动提供的。“成果”丛书通常只——噢，几乎只——通过邀请获得稿子。应邀为此丛书写稿被看作一种荣誉，几乎像是一种奖赏，因此邀请通常都会被接受。在我入伙前，情形开始变化，但这种老传统仍保留着。根据我们的运作方式，我可以，也确实拒绝过主动提供的稿子。同时我写了许多邀请写稿的信。

我为“成果”丛书出的成功主意之一是请马伦·戴(Mahlon Day）写书。50年代中期前的某段时间，我同他接触，请他写一本书。他的回答及时、友好、热情、响亮：不。不，他太忙，写不了这样的书；此外，他正打算写另一种类型的篇幅大得多的书，部分地是巴拿赫的书（到那时已过时了20年）的现代化，部分地是类似于邓福德-施瓦尔茨的书（那时尚未出版）那样的百科全书式论著。我同他争辩，有一次我找到了正确的论据。



M·M·戴，1971年

“请您务必”我说，“马伦，请您务必写出这样一本大书，但写这样的大书的最好途径或许是先以紧凑压缩的形式写出来，把它作为一个纲要，一个概览，换言之，作为一个成果报告，然后，当您手边有了这类实实在在的东西后，就可以再向前进，从这本小书里生长出大书来。”马伦其实并未信服，不过他那时（就像他毕生所有时候）是一位努力工作的雄心勃勃的数学家。他致力于工作，艰巨的工作，而且很快- —差不多3年之后——写完，而我就能翻阅“成果”丛书第21号《赋范线性空间》的手稿。剩下的是历史了：该书出了3版，在25年多之后，《赋范线性空间》仍然是这个领域中最受尊重的经典参考书之 -。

我希望我至少已部分地说明了说丛书主编是宣传者意味着

什么；让我再对这样的主编也是顾问说上几句。会不会用比“裁判员”或“鉴定人”这样的词更说明问题？最常碰到的情形是，以“数学研究生教材”（我所曾从事主编的最成功的丛书）来说，作者提交手稿，由我们［一个小小的编辑委员会，近来是由弗雷德·盖林、卡尔·穆尔（Cal Moore）和我组成］决定是否出版。

一个鼓鼓囊囊的棕色有衬垫大套封出现在我书桌上，里面放满500页打印好的稿纸。我叹口气，拿起红铅笔。噢，是的，我确实用红铅笔，不是为了改错和改进，而是为了标出优点和缺点，使我能记得、搜集并加以综合考虑，在此基础上作出裁定。我干的第一件事是找出标题页（你得惊讶，这一页常告阙如）：这个主题是否适合“数学研究生丛书”？看起来这位作者干这个是否恰当？不适当的主题可能是过于初等（过于高等也有可能，但不大发生）或过于专门，或者已有文献很好地论述过。至于作者，我通过个人交往或通过其工作知道许多数学家，而如果我多少知道稿子的作者，我就能很好地预测稿子的好坏。例如，如果它是该作者写的第二本书，而第一本书挺成功（或砸了锅），那我就能作出我的预测的一阶近似。

下面要做的是找出目录：素材是怎样分配的？各部分如何组织起来？接触到何种同该书标题不同的主题？紧接着找序言，如果没有序言，我会咕咕哝哝，暗暗咒骂：该稿作者在一次测试中失败了，而这个测试对他的平均得分很有影响。

当你在大学书店里拿起一本数学新书时，你干的是不是同我方才描绘的十分相近？它论述什么？是不是你想学的？谁写的？对于他你是否知道任何好事或差劲的事？里面写些什么？最后但肯定不是最次要，它是否适合你？水平是否恰当？作者允诺的论述你是否会首肯并从中获益？读者，水平，还有论述——

这就是人们期望序言描绘的题材，如果知道这些对于一本书的未来读者挺重要，那么它对主编、鉴赏人和裁判员就更加重要得多。

现在该着手读稿子本身了，不过还不是它的内容——我还在力图估量它的形式。稿子是否清楚？是否好到足以使不是数学家的排字工人对付得过来？拼写、标点、习语、措词和语法是否正确？表述是否足够口语化，使得易于消化，同时又足够严肃，不会使人太不开心？

如果回答为“是”，那我就开始关注这500页中到底有些什么。例如，里面是否开列问题，最好是好问题，有趣的、具有挑战性的又能做得出来的问题？没有？差劲。还有，体例是否类似于兰道写的书（定义，引理，证明，定理，证明）还是谈话式的、解释性的、促进思考的、流畅的？后者是我们所希望的。素材是否全是理论，还是穿插了例子和应用？后者是我们所希望的。阐释是清晰还是模糊？前者是我们所希望的，极其希望的。（如果所论主题是我了解的，那我想我能判断文稿的阐述对于初学者是否清楚，如果我不了解所论主题，那我就是初学者，于是我对于文稿阐述质量的判断至少可算作关于它是否成功投的一票。）

你是否注意到我让稿子通过的许多障碍中缺了点什么？你是否注意到我对稿子的数学质量还一个字都没有提到？我把它放在最后，因为虽则它或许是最重要的障碍，但它似乎是任一特定的编辑判断能力最小的方面，不过无论如何倒也是最容易作出决定的障碍。在陈述正确、证明可靠的意义下，文稿在数学上是否正确？论述陈腐古老还是新颖机智？如果我碰巧是一个几何学家而文稿主题是严格的分析，我怎么能判断这一切？我不能，这就是我需要人帮忙之处，编辑委员会作为一个整体，比

任何单个编辑具有更多的数学专门技能，即使如此，它也不能涵盖全部数学。没有问题——把稿子送到大楼之外或把它邮寄到国外，征求你能信任的专家的意见，稿子是否正确、是否新颖？（或是否新到足以断定它适合于"数学研究生教材"可能的买主和读者？）"评阅者"（记得吗？商业上就是这么叫审稿人的）能从他的报告得到适中的报酬，而编辑委员会拿到报告后就能作出结论。

杂志有挺大的按民主方式运作的委员会，它依赖于工作繁忙、拖拖拉拉的审稿人，因此常需好几个月甚至几年来作出决定。决定是否出版一本书要快得多。我常能在一个小时之内干完我那份活（有时连同估价其数学上的正确性，有时这件事不算在内，视我是否了解其主题而定）；是的，一个小时，或许再加 10 分钟口授一份报告。对于编辑之间相互通信并且（如果没有外面的专家他们也能对付）作出结论，一个月或许两个月已足够。需要外面的专家时，时间要加倍甚至更糟。

比起丛书编辑们所承担的工作来，出版书籍还要做更多的事。对于丛书编辑们，他们承担的工作也比我方才描述的要多。有程序性的问题（是否到了安排一个面对面会议的时间？在已提出的两名专家评阅者中，我们应咨询哪一位？如果这份稿子不适合于"数学研究生教材"，我们能否在别处用这份稿子抑或彻底回绝），也有财政方面的问题（此书挺好但有风险，我们是否赌一把？这本书肯定有点亏损，但亏损不大，相对我们同作者的关系是否值得），还有编辑方面的问题（书极好，但作者不精通英语，哪里去找一个能逐行审校的好编辑？稿子主题和论述均佳，但作者很粗心，我们能否找一个文字编辑来改正错字和错用的标点）。

我再说一句就结束丛书主编干些什么的谈论，就是按我的

一般印象，大体上书籍行业比论文行业运作得好些。不仅书籍出版比论文发表快得多，而且一般地说开销少得多（是的，这是我所说的，开销要少），而质量还高一些。

至于说到开销，出版杂志常常得到补贴（例如由出版杂志的大学或付版面费的基金会补贴）；如果没有这项财政来源，许多杂志由于低效运作就很快会停止运转。图书出版通常都是商业投资，目的是赚取利润；尽管数学家们有时大声吼叫，但书籍价格还不算离谱。出版社的定价方针各不相同，有些看起来简直像拦路抢劫，但大多还是合理的。建议你下次在对书价发出咆哮之前，不要你从于口袋里掏出的美元数目而按比较某些客观度量来判断你的花费（一种粗略的良好近似度量是每页付了几分钱。）

至于质量，那只是我的感觉。我觉得，除了极其少数的例外，即使低质量的书绝大多数时候也很可能写的东西都对，而且体系和阐述都很好，读了会增加你的数学财富。有的文章错误多，而且写得很差劲，读它们常会得不偿失。但不要误解我，它们必须存在，我并不提倡停止发表现行的研究论文，退回到“发表”就是“出书”的同义词的年代，不，文章绝对必须，但书籍更好。

您近来写过好书吗？把它寄给我——我将使之出版。

遍历理论的新近进展

随着我工作中编辑成份越来越大，别人的数学水平不断提高，多少令人惊讶的是，甚至对于我也是如此。

譬如说，尽管我专心致志于代数逻辑，我仍继续对遍历理论感到兴趣并讲授这门课程。对于我在1955年夏所教的这门

课，我下了大工夫，结果很幸运。紧接着日本数学会开始出版一系列小书之后，我关于遍历理论的笔记似乎正是为它而写。在简短通信之后，事情就安排好了，我要做的全部事情就是寄去稿子。这意味着修订（容易）和重新打字（不那么容易）。我认识到我得与英文不熟练的排字工人打交道，我不遗余力，避免出错（我的错和他们的错）。例如，日本排字工人对于英文音节划分规则知道多少？当一个单词不得不在一行末分开时，他会怎么办？经验告诉我回答会是"可能很少"，"可能很糟"。在随同稿子寄去的附信上，我要求分行单词尽可能地少，后来校样寄到后，我特别在每页上多花一分钟从上到下看一下最右边。顺便说一句，作为特别保险措施，我把全书打得没有一个单词是在一行结尾处分开的。

遍历理论溶化在我血液中，我对它入迷，很难放手。1948年11月，在美国数学会的芝加哥会议上，我作了关于遍历理论的特邀报告，而在1960年在东兰辛召开的夏季会议上我再次被邀请时，我选择《遍历理论的新近进展》作为题目。这个领域确实有突出的最新进展，即柯尔莫哥洛夫-西纳伊（Sinai）关于长期未解决的共轭性问题的解和奥恩斯坦关于同样长久未解决而且难度至少相同的不变测度问题的解。

柯尔莫哥洛夫和西纳伊的第一篇论文出现于1958年末，但我早几个月即在3月就已通过柯尔莫哥洛夫的信得知其内容。他是从巴黎写信给我的，那时他正在那里访问，并正巧在那里看到我写的遍历理论的书。在信里他告诉我，他在遍历理论中引进了一个称之为熵的新不变量（受到热力学中同名概念的启示），而这个概念可用来解决我一直在宣传的问题之一。用笼统的非专门的语言，该问题可表述如下：有没有测度论的途径来区分两个试验，即无穷次独立扔一灌铅的硬币与无穷次独立扔

一不掺杂的硬币之间时间的推移？用专门术语，此问题可看作：设 T_1 是由两个质量不同的点组成的概率空间的样本的双向无穷序列的笛卡儿积上的移位变换，T_2 也一样，只是组成概率空间的两个点质量相同，问 T_1 与 T_2 是否共轭？（即是否存在保测度变换 S，使得 $S^{-1}T_1S=T_2$?）。

有良好的理由启发正反两种回答，甚至专家们都怔住了，难于同意何种猜测。随机过程 T_1 和 T_2 诱导等价的酉算子（这意味着两者是酉算子群的共轭元素）；这是猜测是的证据。已经知道酉等价但不测度论共轭的变换的例子（冯·诺伊曼和我构造了这样一些例子），这似乎是反驳肯定的证据。如果 T_3 是基于由三个质量相同的点构成的空间的移位，情形又会怎样？T_2 与 T_3 共轭吗？此时要比较的变换是同胚的且是保测度的，而即使底拓扑空间同胚，映射 T_2 与 T_3 也不是共轭同胚的；这是猜测否的证据。据我记得，冯·诺伊曼的猜测是否定的，而利用熵的答案证明他是对的。

粗略地说，熵是信息的一种度量；一个试验的熵是我们能重做一次这种试验所能得到的平均信息量。重做两次独立试验所能得到的信息量是两个各别信息量之和。换言之，熵把乘性的（独立）输入变为加性的输出，所以它具有对数性态就不足为奇。事实上，2 移位和 3 移位的熵分别是 log2 和 log3；由于熵是共轭不变的，由此得知 T_2 与 T_3 不可能是共轭的。

我高兴激动，向柯尔莫哥洛夫要翻印本或预印本或无论什么他能尽快寄给我的东西。他这样做了，寄给我他本人在《苏联科学院报告》上发表的第一篇文章以及随后的一些文章，在这些文章中西纳伊改进和推广了柯尔莫哥洛夫的定义，而罗赫林又把它应用于紧阿贝尔群。我极其努力地学习了这些材料并能相当好地理解它们。我在芝加哥大学就此问题作了讲座并写

了一系列题为《遍历理论中的熵》的笔记，它们在好几年里一直以油印形式被传阅。（直到20年后它们才真正“发表”，即印在1982年出版的我的“文选”的第二卷中。）

在柯尔莫哥洛夫-西纳伊解出共轭性问题之前好几年中，这个问题一直萦绕在我心头，但其实我从未真正研究过它；不变测度问题则是我非常努力地研究过的问题。埃贝尔哈德·霍普夫（Eberhard Hopf）对于给定变换下不变有限测度的存在性给出了一个相当好的必要充分条件，它同给定的非不变测度很有关系。然而，说不定与人人知道的相反，不变无穷测度总是存在——不变测度问题就是要确定是否如此。我成功地把霍普夫条件推广到了无穷测度情形，像霍普夫条件一样，它也相当好，但用起来不甚有效——尽管任何人都看到这一点，但它还是令人满意的。

答案于1960年来到：唐·奥恩斯坦极其机智地给出了一个变换的例子，它无论在有限还是在无穷意义下都不可能是保测度的。它的机智在于所涉及的底测度空间的构造。其中心意思可设想为无穷多个类似于十进展开（但不是一个底数，而是无穷多个增长极快的底数）的“无穷大整数”。事实上该空间是一台无穷加法机。这个例子中的变换本身易于描述：x的像是x+1。给定输入（点x）和指令（加上1），该机器的组合结构以错综复杂的方式运转，使得没有任何测度得以在其运转下保持不变。

遍历理论中的新近进展既确实是新近的，又确实是进展。

著书怎为稻粱谋

你喜欢《科学美国人》杂志吗？我老想我应当喜欢，但我

似乎做不到。它多姿多彩，很吸引人，但大多数文章对我而言太难。它们深入到生物学问题的细节，并假定我了解和关心化学和地震学比我所能消化的还要多。作者与编辑之间合作得不好，结果很可笑，即上面的文章既难读又令人厌烦。所以会产生这样的效果，是由于专家们在把他们心爱的主题解释给外行听时，并未打算以恰当的顺序用恰当的字眼，也由于文章经过受到严格训练的编辑们的砍削，他们硬是去掉任何真正具有个性的文字，要求一种老成持重、没有棱角、不得罪人、千篇一律的出版风格。其结果是关于天文学、古生物学和经济学的文章读起来都差不多——其内容都比我想知道的要多，但比我确实想知道的又要少。

我间或订阅这份杂志，然后对它不再抱有幻想，听任订期终止；偶而上面登载了真正激动人心的文章，就到报刊摊上抢购一期。我喜欢马丁·加德纳（Martin Gardner）的专栏，我也对菲利普·莫里森（Philip Morrison）旁征博引的书评印象很深，颇受教益。可是其他大部分文章引不起我的热情，对此我微微感到歉疚。

我为《科学美国人》写过两次稿。第一次是关于布尔巴基幕后情况的描绘（1957年5月），尽管僵硬的出版社规则让我烦恼，但这个主题十分有趣，我干得很好，结果令人满意。第二次是应该杂志出版社之约：整整一期专用于革新，革新这个，革新那个，我能否写一点关于数学的革新？我试了，结果惨败（1958年9月）。我的原稿（我真希望我有一个复制件）被一个年青编辑无情删改，使印出来的文章乏味无力，条理紊乱，阐述很差。我要做的似乎是试图使希尔伯特第五问题（关于局部欧几里得群是李群的问题）的陈述和解决通过初等三角学的解释得以通俗化，它显得不得要领，缺乏效果，不够实在。其实

文章本来并非如比，它只是一种类比，但结果很糟或差劲。例如，文章提到“复变量（含有虚数i——－1的平方根——的变量）函数理论”来“解释”詹姆斯·克拉克·麦克斯韦（James Clerk Maxwell）的贡献。我没有写这些玩意——上天作证！我真为让它继续存在感到毛骨悚然，我真该死！

文章中许多话都非我的措辞，非我所安排，非我的风格——当它出现时，我感到苦恼、羞愧，我写信给负责大政方针的大权独揽的总编辑丹尼斯·弗拉纳根（Dennis Flanagan），表明“再也不会”；当然情形正是如此——我再也没有为他写稿，他再也没有请我写稿。但他仍然掌权，《科学美国人》仍然多姿多彩，很吸引人，我怎么能肯定我的批评态度正确？看起来这份杂志是成功的——它不断出版，人们继续购买；我不能同成功争吵，但我不喜欢读它。

同弗拉纳根闹得很紧张并没有占据我的全部时间。差不多与我写关于布尔巴基的文章同时，我开始设想出《有限维向量空间》的第二版。范诺斯特兰德出版社有意出一商业版，虽然他们同意付酬，但在50年代的惨淡年月，线性代数是否是硬塞给缺乏防卫能力的大学生的合适货色，还并不是很清楚的。当我着手第二版时，我干了好几个月苦力活，也不知道所付努力在智力上是否值得，在经济上能否得益。现在已有最后结局：智力上不值；经济上有一点儿得益，但同所花时间相比是否值得？

我重写《有限维向量空间》真的是重新抄写，每个单词都手写。只有这样我才能对每个细节都集中注意力。据我记得，早先普林斯顿版的每个单词都仍在第二版中；两版的不同在于新的材料。开头我收进了一点域论，我还得学习多线性代数（交错形式以及与之类似的对象）以简单地论述行列式，但我大部分的努力是在习题上（300道以上）。我发明习题，我偷用习题，

书于1958年印出（在写出该书四分之一世纪之后），我很高兴它一直在起作用。它一直出售着，差不多每年售出800本，不算非常了不起的畅销，但肯定在起作用。

有时人们问（有时不敢问）作为数学写作者和编辑能挣多少钱，现在对此作至少部分回答比任何时候更合适。800本《有限维向量空间》大约带来2000美元收入。作者的版税通常在5%到15%之间，通常在前几千本售出后（盈亏相当后）从低百分比升到高百分比，10%是最常见的比例。编辑版税从小于1%到4%左右之间不等，也随售出数增加而增长，最常见的是2%。如果一本书作者多于一人（许多书是这样，但大多数书不是这样），或者一本书作为一套丛书之一，而该丛书编辑委员会由多于一人组成（大多数编辑委员会是这样），那么就分享版税。举一个典型例子：你花两年写了一套丛书中的一本书，该丛书编辑委员会有3人，5年中以每本20美元价格售出4000本，然后销售量几乎下降到零，不再开印让你热泪盈眶。此书还在市场活跃的5年里，你每年由此得到的总收入为1600美元，而每个编辑委员每年从你干的活中得到100美元。

说到第二版，我对任何正在想写第二版的作者有个劝告：别干。如果这本书是微积分这样的水平而你又贪婪，那我本应当给你一些更令你不快的劝告。然而，通常写第二版就正如同写一本书——花的时间一样多，花的力气一样多，但所得回报无法相比。这里"回报"是指人们创造了一些东西后所能得到的智力激动和成就感。写第二版恰恰不是足够的创造。我知道；我做过。两次。

再去普林斯顿高等研究院

20世纪50年代末，当我仍是一个快乐的芝加哥人、一个爱国者时，工作上已有最终导致我离开芝加哥的压力。我热爱那里的许多人，那里也有许多人热爱我，但我不喜欢每个人，反过来也不是每个人都喜欢我。我不断在很远的地方（英格兰、苏格兰、西雅图、意大利）住上几学季，我也从国内许多地方（厄巴纳、伊利诺伊—盖恩斯维尔、佛罗里达—普尔曼、华盛顿—艾奥瓦城、艾奥瓦—罗切斯特、纽约）接到欢迎去工作（常常是当系主任）的邀请（有时是具体条件）。我在这里谈的是1957年至1961年大约四年的时期。

所有那几年都好，都变得很好：1957年秋季，我开始一年休假，大部分时间呆在普林斯顿高等研究院。邻近高等研究院地域的住宅区那时是全新的，事实上无论从建筑上或是管理上它都是刚建成的。电气“辐射供暖”系统有时工作，但在恶劣的暴风雪天气它却停止运转，有些无人居住的公寓房间冷到抽水马桶里的水都结冰，而弗雷德忙着把大量木柴送到每个有人住的房间里。如果你身上裹着毛毯蜷缩在起居室靠近火炉处，试图干些事可能会有麻烦，但你能呆着感到足够暖和。弗雷德真了不起，他是黑人，身材高大，担负全部维修事务，友好而又高效。高等研究院正在摸索出租寄宿事务，而并非每个来访者都认为最初的试探是成功的。有些套间在一段时间里分给了两家人家，使他们惶惶不可终日；有些来访者的预订单必定掉在秘书桌子底下了，这就得临时紧急提供住房，那几天当然不舒坦。我运气不错：爱因斯坦路79号没有什么大问题，我喜欢这套房子。

奥本海默那年是高等研究院院长，他的任务之一是邀请每个暂时访问者到他办公室作十分钟欢迎会见。我觉得他并不喜欢这项任务。当我被召见谈十分钟时，我们握手，然后他从“代数逻辑有什么新进展?”开始谈话。对我而言这听起来像是虚伪的礼数；他不知道什么是代数逻辑，他也不想知道那里面有什么新玩意。为缓和气氛，我笑着说：“你得到了关于我的很好的简介。”他没有笑，气氛还是挺僵，最后我们正式地完成了这套礼数。很多年后，二三十年以后，我把这件事告诉给乔·杜布听，他说：“噢，那就是有点儿合不来，对吗?”我感到惊讶。我知道乔的意思，但我以前从未这样看待此事。我不觉得我同人合不来，可或许我是那样。我是那样吗?

那是1957年，在普林斯顿，我开始健康起来。我已年过40，我开始感觉到这一点。除了十几岁时偶而激烈地打点网球之外(打得并不好)，我从不运动；在30到40岁之间，只要可能，我用开车来代替走路，用躺下来代替开车。我喜欢适度相聚欢饮，这意味着每天喝一次、两次或三次酒，平均每周有一次微醉。我烟抽得很凶，每天20到40支，在社交晚会上抽得更多，过去几年中我一直竭力控制体重，但我仍爱吃甜食，讨厌有益健康的蔬菜；在我看来，完美一餐应该有大量浸在融化的黄油中的煮熟的龙虾，两三片香蕉奶油馅饼，加糖浓咖啡，上面还得有一层加糖掼奶油。这样的饮食起居，再加专业生活的压力以及先天性的慢性疑病症，效果可想而知。我有许多症状。我患感冒，头痛，嗓子难受，胃不好，心跳过快。我肯定我患有各种疾病：肺结核，脑肿瘤，肺癌，溃疡，心脏功能全面衰退到了晚期。

所有这些都不是突然发生的新毛病，但却越来越糟。每当剧痛我总要向医学专家咨询，但总被告知没有什么大问题：“只

需吃这些药片两三周，如果没有好转就告诉我。”在普林斯顿时不同的是，这些累积起来的心理效应比过去更甚，幸运的是我找到了一位通情达理的医生。迪恩·蒙哥马利（Deane Montgomery）把他介绍给我（我甚至已不记得他的姓名）。他知道我在普林斯顿只是一个访客，他满不在乎地向我喊叫，也不在意对我诚实和强硬。他让我做X光检查、血液检查，他细看我的眼睛、耳朵、鼻子，他敲击、挤压我的身体，让我采取各种不舒服的有损尊严的姿势。

做完这一切后他说（大意）：“你没有大毛病，哈尔莫斯；你干吗不到外边去走走或干些什么？”

我乐于接受这项劝告。我已经是节食减肥者（不是很聪明，但至少是自觉的），而且已试了两三年戒烟；现在我还开始锻炼，我变得强健起来。我以中等步速散步，第一天走5分钟（沿高等研究院前面的环行车道走一圈），然后每隔一天增加一分钟或稍多一些。打从那时起，我一直系统地、强制性地以散步作为锻炼方式。现在我每天至少走一小时，至少走6公里半。周末我能抽出更多时间，通常一天要走13到16公里，有时要走24到32公里。我自我感觉相当好。谢谢您，不管名叫什么的医生。

1957年的高等研究院比10年前大了，新建筑和新教授涌现出来，人口似乎多了一倍。原先数学所有6名创始教授，现在有12名教授，加上荣誉退休教授维布伦。其中有3位常任成员：吉米·亚历山大，他很早以前就自动降到这一职称，再加朱利安·比奇洛（Julian Bigelow）和赫尔曼·戈德斯坦（Herman Goldstine）。后两位由于冯·诺伊曼而呆在那里，两人以前同他一起工作，任务是协助他设计、制造电子计算机，现在冯·诺伊曼早已谢世，而赫尔曼为国际商用机器公司工作多年（但未放弃常任成员职位）；最近我听说，赫尔曼回到普林斯顿，

他和朱利安两人在高等研究院仍保有办公室。



高等研究院富尔德大楼公共活动室，1957年。席地而坐者，从左至右：S·梅纳克希孙德拉姆，I·E·塞加尔，E·H·斯帕尼尔，F·I·莫特纳（Mautner)，S·卡普兰（Kaplan)。后坐者：R·A莱布勒，P·R·哈尔莫斯，W·F·埃伯莱恩（Eberlein)，H·鲁宾（Rubin)。

高等研究院的成员，如同我以前呆过的时候一样，地域和专业分布都广泛而使人振奋。有来自东欧的西贝·马尔德希奇(Sibe Mardesic）和C·D·帕帕基里奥科普洛斯（Papakyriakopoulos)，有来自西欧的德·拉姆（de Rham)、勒雷(Leray)、罗伦岑（Lorenzen）和塞尔（Serre)，有来自以色列

的阿耶·德沃雷茨基(Aryeh Dvoretzky),有左翼的钱·戴维斯(Chan Davis),有来自格鲁吉亚的汤姆·布雷厄纳(Tom Brahana,我从前的代数导师罗伊·布雷厄纳之子,一位拓扑学家),也有来自物理学领域的杰里米·伯恩斯坦(Jeremy Bernstein)。那年数学所大约有85位临时成员(包括物理学家),人数猛增。

那时杰里米·伯恩斯坦尚未以其论著享有盛名,但只消通过午餐和喝茶时聊天我就能看出他不仅富有魅力而且很有文化修养。后来他为《纽约人》写了许多主要面向科学的图书的书评,然后写传记,写文章,写书。他喇叭吹得极好。保罗·罗伦岑是数学家,至少在同样程度上又是哲学家,他能同我谈论逻辑学。他的德国人相貌有点像好莱坞负责分配角色的导演心目中威廉皇帝统辖下的普鲁士军官:高大英俊,死板笔直,生硬拘谨。如果再戴一副单片眼镜,那对他再自然不过。他住的公寓也在爱因斯坦路上,同我们只差两号。他请我们晚上去他那里喝酒聊天,8点,他说。8点时我们还在家里。准备溜达出去,又想再等10到15分钟,免得早得有点不礼貌。8:03,电话铃响。"我是罗伦岑,你们是不是忘了?你们来了吗?"

呆在高等研究院对我来说真好。我的办公室比上次的大,但与德沃雷茨基共用一室。这对我没有困难,但对他可能有些麻烦:当时我已是《美国数学会会报》的编辑,研究院分配秘书协助干此事,而当我口授什么东西时,可怜的德沃雷茨基就不能很好地集中精力。我们友善地解决了时间安排问题。我尽管安排在他不在的时间口授,他尽量安排在我不在的时候思考。

那年我同维布伦一起用过多次午餐。他那年77岁,仍有一间办公室,几乎每天都来,但没有多少事干。他几乎已失明,失去了行政责任和权力。他看上去仍挺英俊——身材高大,满头银发,体态挺直,穿着四粒扣的上衣。他记忆力极好,喜欢回

忆。他特别喜欢回忆他在芝加哥大学的岁月，他于1903年在那里获得博士学位。我来自芝加哥，因此很感兴趣，再说我喜欢有教养的老人。他决不只是令人厌烦地独个儿长篇大论——他急切地想听现在芝加哥的情形，正如同他急切地想说那时芝加哥的情形；但他寂寞，需要填补他的时间。他常在午餐后走进他那豪华的办公室，斜靠在软皮扶手椅上，同我交流他的芝加哥故事。

布尔代数和集合论

呆在高等研究院那年末，我去了英格兰，主要是去苏格兰参加1958年爱丁堡国际数学家大会。我在英国有一些朋友，或是在开会时相识的，或是应邀去过芝加哥的。由于这些朋友以及我自然的亲英倾向，我很快感到无拘无束。我变成强烈的亲苏格兰者。我特别喜欢爱丁堡，一般地我也喜欢苏格兰南部。此后我常去英国，一直特别喜欢苏格兰和苏格兰人。

整个旅行是令人愉快的但并不像读物那般有趣。我是以人为主要目标的旅游者：我为人（闲聊与数学）而去，非为景色（山水风景）或文化（大教堂或博物馆）而去。一到达我们就租了一辆车，用5分钟熟悉一下靠左开车。此后就是一个接一个的感情真挚的欢聚，在南安普敦和苏格兰之间来回。比尔·科克罗夫特（Bill Cockcroft）在南安普敦，大卫·肯德尔（David Kendall）在牛津（后来他才去剑桥成为英国统计学先生），彼得·斯温纳顿-戴尔（Peter Swinnerton-Dyer）在剑桥，H·R·皮特在诺丁汉。事情就是这样。

爱丁堡本身就能唤起强大的力量：那里有许多老朋友，也有许多新结识的富有魅力的人。说到老朋友，芝加哥大学数学

系去了9人，比我们住在芝加哥时通常任何一次相聚还要多；艾伯特扬言要召开系会。说到新朋友，最有意思的是来自铁幕后面的。亚历山德罗夫（Alexandrov）在那里（事实上两位亚历山德罗夫——P. S. 和A. D. 都在），还有索伯列夫（Sobolev），库洛什（Kurosh），沙法列维奇（Shafarevich），来自匈牙利的有卡尔马（Kalmar）、图兰；来自波兰的有马尔切夫斯基（Marczewski），谢尔宾斯基（Sierpinski）。像这样的相互会见是国际会议的主要好处。保罗·亚历山德罗夫说道地的德语，A·D·亚历山德罗夫用英语，同索伯列夫谈话用法语，同库洛什则用结结巴巴的德语。宝丽来一次成像机当时还未普遍使用，当某人用宝丽来相机为库洛什照张相并把它作为礼物送给他时，他惊喜、感动，连连用俄语和德语道谢。匈牙利人坚持用匈牙利语同我谈话，波兰人则说各种语言。

纳吉没有去。1956年动乱才过不久，他的立场还没有有利于匈牙利当权者到足以允许他出国的程度。他把稿子寄给史密西斯（Smithies）——最辛苦的负责工作人员，并让我在会上宣读。我当然照办，我为自己谈论多演代数并为他谈论算子膨胀。

这次大会参加者很多，也是一次很好的大会。这是我28年后首次返欧，也是我有生以来首次去英国。正同往常一样，离家一年后，我就很想回家并大干一番：高等研究院了不起、国际数学家大会令人激动，使人振奋，但家是我心之所在，坐在自己的书桌边，甚至不用看，在我肌肉所及范围内，我能随手拿起熟悉的书籍和重印本，这样我就能更好地思考数学问题或别的事情。

就数学本身而言，尽管我仍在做关于遍历理论的报告，尽管我越来越倾向于算子理论，但我的心思一部分仍在代数逻辑上。我把相当大部分的时间和精力花在逻辑学及其副产品上。早

期的副产品是我主持的关于数学机器的讨论班，那甚至还在我去高等研究院之前。逻辑学家研究不同种类的课题，例如，他们研究集合论，研究形式语法，研究模型论（形式语法的解释和语义），而自从哥德尔之后，他们越来越多地研究可计算性。你怎样定义可计算性?答曰：通过递归数论或所谓λ演算或图灵机——它们都几乎通向同一科目。我想了解里面的奥秘何在，我说服几个学生，他们也想进一步了解。这些学生中有迈克·莫利和阿尼尔·尼罗德(Anil Nerode)，两人在这方面都已接近处于显要位置。而这方面的讨论班后一段时间里也能艰难但很好地进行，甚至还产生出几篇稿子，其中有某些我老说要在某天回过来研究的想法——如果我能活到99岁而且能回到我老说的所有课题的话。

研究逻辑的另外两个副产品是布尔代数和集合论。布尔代数是我从爱丁堡国际数学家大会返回芝加哥后于1958年开的一门课程；几年后我的笔记以范诺斯特兰德小书之一的形式出版。我总是喜欢这个主题，它对我而言似乎纯净无瑕。看来它像所有数学那样纯净、匀称、优美，同时它又是数学的一幅理想化、简单化和纯粹化的图像。当然它有不纯净的部分——如同任何事物（包括数学）那样——它能弄得复杂、丑陋，充满“大”基数；当然，即使它的容易的、优美的部分也并非平凡的，这个科目有着深刻的定理和富于挑战性的未解决问题。

把我吸引到布尔理论的主要动力在于，在某种意义上，它是把望远镜倒过来看全部数学所得到的离散化图像。数学中几乎每件事在布尔理论里都有其0—1样式(我本想说“数学中每件事”，但胆小让我添上了“几乎”两字。）在分析讨论函数之处，布尔代数讨论集合（特征函数）；代数中的多项式方程、矩阵和理想都有其小比例布尔样式；而一般拓扑的布尔表现就是

有限与连续之间称为全不连通的奇特折衷。我提出一个例证：关于交换 C^* 代数的盖尔范德表示理论的布尔样式就是斯通表示的定理。事实上，斯通定理是盖尔范德理论的一个容易推论，而在斯通的证明里可看出盖尔范德证明主要步骤的框架。更进一步，真可以把盖尔范德的证明安排得使斯通的证明成为其第一步，影响其主要结构的一步。

我（出于忠诚）深信，如果我知道布尔代数的一切，我就非常接近于知道分析的一切，或者，为使这样一条模糊的宗教条文更精确一点，我就接近于这样一个人：他知道可测集的一切，就正好知道可测函数的一切。接近，是的，但还不是一样。阿基米德用来求出抛物线形面积的穷竭法是不是接近于诸如 $\int_0^1 x^2dx$ 这样的勒贝格积分的理论？是的，是接近，但填平其间空档花了超过 2000 年的时间。

1959 年春，我应邀去西雅图的华盛顿大学担任富有吸引力的客座教授。我教代数逻辑（当然如此），并开始结识遥远西部圈子里的人物，他们在别处并不常见到。埃德·休伊特（Ed Hewitt）那个学季不在，因此那一学季我就是埃德·休伊特：我住在他家里，早晨吃他的谷物早餐食品，开他的小汽车，在他的办公室里干活，向他的秘书口授。

华盛顿大学那时有一个奇特的传统：对待客座教授在许多方面更像对待常任教授而不是一般教授。例如，当考虑工作申请时，在我去的系里的会议上宣读了申请信，我也被拉票。一次系图书室有未曾预期的几百美元剩款，在会上讨论怎样用这笔钱，我提出的关于买一百本《有限维向量空间》的动议未获通过。

那一年里我学会了习惯于上午在家里干“私活”即思考和

写作（家里有学前儿童的家长都很羡慕），下午在学校里干“公活”即教学、备课、咨询、通信。在我呆在西雅图的那几个月的上午（他们称之为春天，但天气暖和潮湿——这是我生平度过的最潮湿的夏天），我坐在埃德·休伊特的床边写《朴素集合论》。我最近刚学过一点公理化集合论，并热心于传播它。我设想的对象是不懂得形式地运用逻辑的学生或不喜欢形式地运用逻辑的读者，而这种运用是经常会遇到的。其结果是写出了从非逻辑学、非形式化和朴素观点来论述公理集合论的一本书。

我用“朴素”这个词惹了点麻烦。荷兰文、法文、匈牙利文、意大利文和葡萄牙文的译者都各自误译了书名。荷兰文本译成“直观”，意大利文本译成“初等”，匈牙利文本译为“初等”，但所用单词在匈牙利语中也有简单、还不成熟、有点儿蠢的意思。葡萄牙文本译为“单纯”，而法文本则回避这个问题，不用任何形容词，直称为“导引”。只有德文译者有勇气把书名译为《朴素集合论》（*Naive Mengenlehre*）。我用这个词并无恶意，我并不试图找一个引起争议的标题（当我开讲座时，我几乎总要这么做），我仅仅是在这样的误解之下写该书，即“朴素”（naive）在集合论中是一个真正的专门单词，与“公理化”同义，不多也不少。我不记得从哪儿得到的这个想法，但我想是从集合论奠基者之一得到的，这些奠基者或是康托尔本人，或是罗素，或者是后来某些历史短文的作者。他们一方面反对康托尔和罗素的观点，另一方面又反对策梅洛（Zermelo）和弗伦克尔的观点。

写作《朴素集合论》挺容易，又很有乐趣。看来很清楚，我必须从我出发之处开始，又必须在唯一确定的方向上采取下一步，而在第一、第二步之后，第三步本身也已得到提示。我感到我无可选择，我在体例结构方面无事可做——主题本身已规

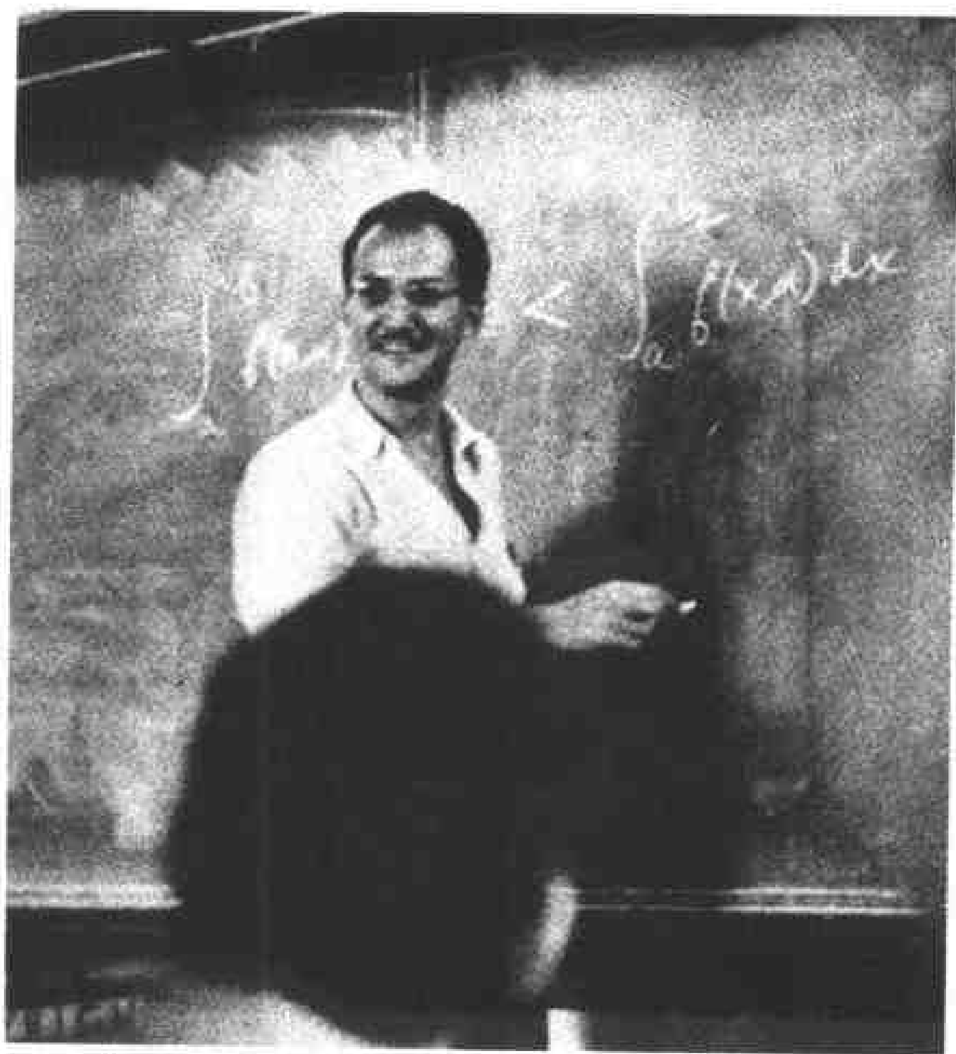
定了它的结构。当我第一天坐在埃德·休伊特床边时，全书结构已创定，嗣后这本书是在自我创作。写完此书共花了6个月时间，3个月在西雅图，此后用了3个月润色。这对我来说是一个记录，我写的所有别的书都没有这么快。我真想知道，如果休伊特家里有一间真正的书房使我不必非在卧室里工作不可，情形又会怎样。

一段时间之后，副产品不再产生。就像我离开遍历理论那样，我离开了逻辑学，永久地转向别的课题和别的地方。转向算子理论很容易，也挺自然。这不是筹划好的突变，而是缓慢的逐步的演变——一篇小文章导致另一篇。离开芝加哥则是另一回事，那是离别之痛。

离　别

当我还在念高中时我就喜爱芝加哥——我喜爱搭乘围着市区转的有轨电车，我喜爱密歇根湖，我喜爱芝加哥长长的笔直的街道，它那优美的笛卡儿坐标系以及富庶、令人激动、开满店铺的市区。几年后当我回来时，我品味到重返的“胜利”，我一直爱芝加哥。我尤其赞赏喜爱芝加哥大学，我仍是这样，但随着我在那里住了15年，慢慢地我觉得不再喜爱这个城市。它嘈杂喧闹、脏乱危险，而且随着岁月推移越来越甚。

这些情形可能无论怎样让我担心，但还不足以使我离开；使我离开的主要因素是桑德斯·麦克莱恩。他当了6年（1952—1958）芝加哥大学数学系主任，他认为我没有什么了不起。我们相处和睦——我们之间没有敌意，没有仇恨，他常去我办公室，同我谈他工作中的问题。他喜欢这种运作方式——通过问问题来思考，我喜欢我们的见面，为它们感到高兴。后来当我



P·R·哈尔莫斯，1949年

决定离开并向他告别时，不再是系主任的桑德斯告诉我，他也有同感并为此向我道谢，他说我听他说话时的谅解态度、我的观点和我的建议对他挺有帮助。或许这只是礼貌表示，不过我倒不这么看。当我说他认为我没有什么了不起时，我认为他是指数学上。

麦克莱恩当系主任的雄心壮志是建成“世界上千真万确最好的数学系”（他的原话），而摆脱第二流数学家并代之以第一流数学家便是在正确方向上迈出的一步。他觉得我是第二流的。他理解卡普兰斯基的代数，印象深刻；他认为他理解我的逻辑



S·麦克莱恩和S·爱伦伯格，1967年

学，印象不深刻。他不理解我在遍历理论和算子论方面的工作，也没有理由要求他必须做到。他没有可以摆脱我的直接手段，但他尽力采取间接的手段：尽可能长时间地让我处于低级别，让我的工资提得很少，只要有机会随时随地推荐我去别处工作（常是当系主任）。当然我懂，我感到不自在。我不能也没有被芝加哥大学“解雇”，我在麦克莱恩不当系主任3年后才离开，但我总觉得实际上是他解雇了我。

芝加哥大学数学系在麦克莱恩年代是在改变。前斯通年代的人离开了它；他们过老了，或由于其他原因从顶峰上下滑了。斯通本人也越来越多地受到埋怨：“他的薪金比他的价值多得多，他外出过多，他从来不在这里，他对我们这个系已不再有什么用”。我同他总是相处极好，我仍然感激他为我所做的一切，但学校行政管理机构和系里的统治机构都开始转而反对他。系

里的统治机构由年纪35岁上下或更大些的人(不是斯通)构成;而在5到10年里我们中谁将进入统治机构也开始清晰起来。1959—1960年度的工资说明一些情形:斯通20 000美元,希林9 500美元,格雷夫斯12 000美元,艾伯特、陈省身、麦克莱恩和齐格蒙德全都是16 000美元,卡普兰斯基和我都是13 000美元。斯通的一阶导数几乎等于零,而我的二阶导数几乎等于零。

纷至沓来的当系主任许诺对我没有吸引力。我挺在行的方面是写论文而不是处理人际关系,当系主任则更是远在其次。对此我感到不舒坦,甚至在我成功时也是如此。我实在不是当系主任的料。不当系主任的工作许诺又有一些别的不合适的事情,直到我同丹·休斯(Dan Hughes)相处并得到友善的帮助,情形才有变化。

丹曾在芝加哥大学当过两年临时讲师,然后他去了密歇根大学。我想密歇根大学曾是而且仍是中西部最好的州立大学,在那些年里它还相当富裕。该校数学系正在扩展,丹建议系里聘用我。多少令他也令我惊讶的是"系里"听了进去。乔治·海伊(George Hay)那时是密歇根大学数学系主任,1960年8月中旬,他写信给我问我愿否考虑那里的教授职位。"干吗不?"我说。

密歇根大学是好学校,相当好,但与芝加哥大学不在同一档次。该校数学系比芝加哥大学数学系大得多(不好),其中许多人是冗赘人员(不好),大学生和研究生群体的状况都低于芝加哥大学(不好)。但密歇根大学是值得尊重并受到尊重的,正如我所说,在其所在档次中是最好的(挺好);我以前去访问过多次,有朋友和熟人(挺好);那是一个洁净的令人愉快的小镇,可以好好散步,犯罪率是芝加哥的一个小分数(很好)。

谈判时间不长。到9月,初次接触一个月之后,我已得到

坚定的许诺。他们非常需要我，我在芝加哥大学 1960 年预定工资为 14 000 美元；他们答应我 1961 年工资为两万，加上一开始慷慨提供的 3 个月夏季研究任务拨款，加上第一年教学负担减半（一周 3 小时），加上搬家补贴，加上我的学生卡尔·林德霍尔姆的助教职务，加上舒适的大办公室，加上半个秘书。群论专家铃木通夫也于同一时间被邀。我有点认识他并很喜欢他，期待与他成为同事。如果这事办不成，他们也要我建议别的可能人选。[我开的名单是海·巴斯，约安·詹姆斯（Ioan James），维克托·克利（Victor Klee），利奥波德·纳克宾和埃德·斯帕尼尔。他们都没有去，但这是一个好名单。]

换句话说，我正有一个机会，从好池塘里的一只小青蛙一跃而为相当好池塘里的一只大得了不起的青蛙。那一年艾德里安·艾伯特是系主任，他挽留我。当听到我告诉他密歇根大学提供的条件后，他做的第一件事是要求就在那天见校长。下午很晚时他见了校长，当他离开校长办公室时，他立即打电话给我，我的工资从预定的 14 000 提到 17 000，立即生效。(就是说在密歇根大学工作一年前即生效。)麦克莱恩感到不快——艾德里安后来告诉我；给我那么高报酬“打乱了系里的工资平衡”，当然，别的更多的事情更是不可想像的。

1960 年 11 月 23 日，感恩节前一天，我写信给海伊：“亲爱的乔治：你的——这是正式的。换言之，对您所作的全部努力深表感谢；我接受贵校的盛情邀请。”

当我把我的决定告诉艾伯特时，我也对他说，不是因为他当系主任而是因为麦克莱恩当前任系主任我才离开。他说他知道这一点；作为麦克莱恩的继任者，他已为他没有作也决不会作的行政决定受到了不止一次的惩罚。自从我走后，芝加哥大学数学系在许多年中聘用了许多新人，其中有些比我好得多，有

些也好不到那里去。我的离去无损芝加哥大学一根毫毛，但同样地，我还没有谦卑到说我的离去提高了该校数学系的质量。

为什么我要走？这是不是一种逃避？我是不是从最高档次的挑战中溜号？我不认为是这样，但显然我似乎难以客观地回答这个问题。我知道，离去的理由比留下的多得多，选择应由我作，一旦我下了决心，我满腔热情地适应新情况；但从那时以后，在空闲的时候，我老要想我做得是否正确。

第三部

长者

第十二章　怎样教书

换档——改变方法

当我刚到达芝加哥时，即使最下级的秘书们也把我吓住了——他们代表官员体制。如果我请一个人做一件5分钟的复印工作，她说她后天替我做。我说好吧，当然，就这样吧！我确实不知道这件事得要多长时间，而我也养成了从来不与当局争论的习惯。到我离开芝加哥时，我已经懂得，秘书们也是人，他们也不是因为在任就一定正确。

就在我在芝加哥的最后一个夏天之前及其间，我做了更多的行政工作，这种工作比我过去从事的工作更需要秘书的帮助。我必须组织一个小的学术会议，这是一个十分有效的会议，大批的算子理论家聚在一起开会，互相交流最新的成果。这不是一种金钱的浪费，但是，只有为了那个目的而开会，才能说那不是浪费金钱，而是花钱。我有国家科学基金会资助的基金，仍然还有一年有效。而把它转移到密歇根州不是完全不可能，就是极为不平常的麻烦。艾伯特甚至做梦也会想将钱退还给华盛顿——他说，那才是浪费。他说，快把钱花掉，安排一个会议或干点什么别的。

即使是一个小型的会议也要做大量的组织工作，一个未事先准备的会议就需要得更多。秘书们发信，打电话，查公共汽车、火车和飞机的时刻表和票价，预定旅馆和宿舍。我发现我自己作为老板，要负起责任和做出决定，我真的从来没有丢掉我的东欧人的观念，那就是不得不极度小心谨慎地对待官员，用一种介乎军士和疯子之间的细心的尊重对待他们。无论如何，那个夏天我懂得了，一个公务员（例如一个会议的安排者或某人的秘书）不一定和奥匈帝国炫耀武力的下级军官一个样。

“学术会议”可能不是一个正确的字眼，因为开会决不止仅仅几天。事实上，它从6月中旬开到8月中旬，参加人数不多，大约20人，但开得很热烈。我们每周两次聚首正式举行讨论班，在午饭、喝咖啡、吃比萨饼或喝啤酒时的非正式的聚会每天最少两次。那时我第一次见到乔·斯坦弗里（Joe Stampfli）以及我的有辉煌前程的“孙子”查理·贝尔格［（Charlie Berger），他是莫·施赖贝尔（Moe Schreiber）的学生］。斯韦托查·库列帕（Svetozar Kurepa）在那里，那时他的事业刚开始。纳吉（Nagy）也是如此，吉安珂·罗塔（Gianco Rota）还没有成为组合学的国王，而詹·戴维斯（Chan Davis）、迪克·卡迪逊（Dick Kadison）、查尔·莫尔（Cal Moore）和约翰·沃尔默（John Wermer）在那时也还不是他们后来这样著名。我们谈论单算子和由它们构成的代数，我们谈论移位和态，膨胀和换位子，那是一个令人满意的和成功的夏天。

当会议结束时，我搬到安阿伯，我通常是顺从，但偶尔反叛地对待权威的态度已经减少但并没有消失。我过去有（现在仍然有）这种态度，那就是虽然有时突破这些规则可能是可以的，它首先必须要知道它们是什么。乔治·海伊（George Hay），我的新老板，原来预期我是一个难相处的、妄自尊大的

家伙。而在第一学期，我来看他的次数使他吃惊，我见他不是要求给我特殊待遇，而是向他学习有关办事的程序。国家科学基金会用于旅游的钱能被用于资助研讨会的讲演者吗？晚上的补习班的课是否也可以安排我上因为去开美国数学会会议而缺的课？是否有规定把阅卷评分也算作一些办公时数？

当我开始我在芝加哥的工作时，我感到自己除了年轻和热情之外，什么都没底，而当我离开时，我已是中年人并且已有所成就。这不是说我感到疲劳并且准备慢下来，恰恰相反，我准备把一些早年的、暂时的表示改变成把我引导到对我来说仍然是全新的学术生活的方面来。我在数学上还没死亡，但我变得越来越多地投入专业事务工作（委员会和编辑部工作），就教学工作而言，就是指导哲学博士生和实施穆尔教学法。

至于数学，在我离开芝加哥后的 20 年里（1961—1980）。我发表了大约 24 篇论文，其中最好的 6—8 篇在质量上和我在 40 年代和 50 年代写的论文水平不相上下。这些“第二波”论文中的第一篇是关于移位的，在这个分支基础的工作是波尔灵（Beurling）做的．他研究所谓重数 1 的单边移位，而赫尔逊（Helson）、波塔波娃（Potapova）和拉克斯（Lax）则分别把它推广到有限重数的移位上。我的贡献则是表述关于无穷重数的移位的命题，并且对一般情形，所有重数，提供了一个相当简化的证明。

谈到教学，我当然一直在教初步的和高等的课程，但我变得厌烦。我工作中的那部分很少有哪些方面能再使我惊奇。我继续享受课堂教学的乐趣并认为我从事了一项漂亮的好职业。但是新鲜感已经逝去，那可能是为什么我被穆尔教学法的挑战所吸引的一个重要原因。

穆尔教学法

我记不清我什么时候变成一位转而信仰穆尔的人。我还在当研究生时，我就知道关于 R·L·穆尔。费利克斯·威尔奇(Felix Welch)在德克萨斯认识了他并给我讲关于他的情况，许多传说得到普遍的流传。我持续不断地看穆尔的蓝皮研讨会报告的书，希望从中理解它的含义。我从没有成功过，我总是被点集拓扑学所迷住，而那正是这本书讨论的内容。但是语言很别扭而定理看起来也太特殊。这里有一个例子（选自第一版 33 页）：

> 如果 M 是一个闭点集，G 是一个互不包含的闭点集的上半连续类，使得类 G 中每个点集包含 M 的一点，且 M 的每一点都属于 G 中某个点集，如 K 是 M 的一个子集，而 W 是 G 中所有包含一个或多个 K 的点的点集的类，且 M 中无连续统包含 M--K 的点，则 W 是关于 G 的一个区域当且仅当 K 是关于 M 的一个域。

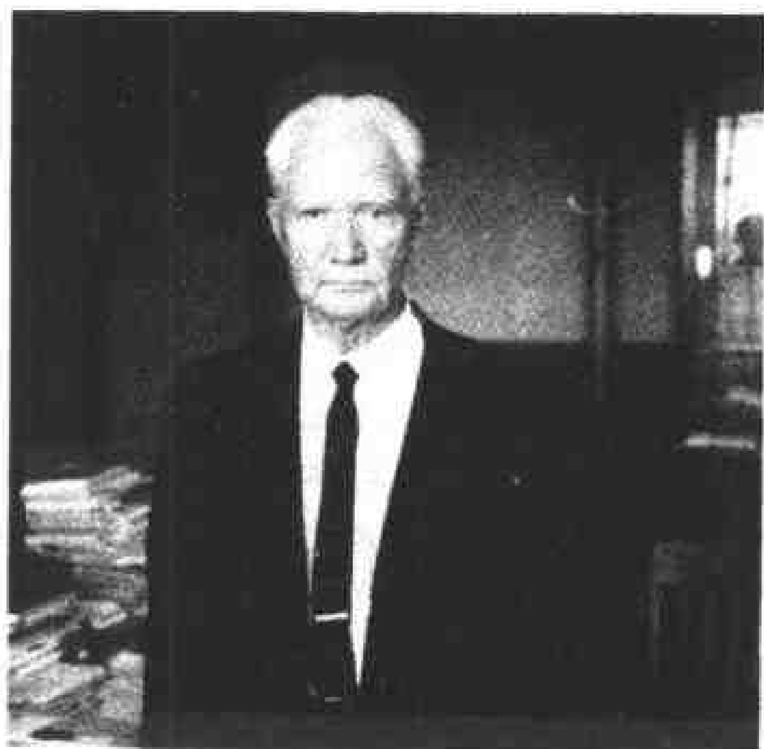
穆尔为数学的发明感到激动，他明白数学发明与数学表达正确之间的关系，他能就他的感情和他的理解与他的学生进行交流，但他似乎不了解也不关心数学和数学写作的美，结构和雅洁漂亮。他的大多数学生继承了他的缺点，同时也继承了他的优点（当然有相当程度的淡化）。只有像威尔德（Wilder）和炳(Bing)这类最伟大的数学家，能够克服作为穆尔学生的缺陷而成为真正的数学家。

穆尔坚持使用他自己的名词术语，而这种术语并不是拓扑

学界其他人使用的那种。他对某种数学的态度是不可改变的。他不会说："考虑两点p和q……由于怕在退化情形下，p会与q重合，从而使点点数实际上就不是两点。他永远不同意，两个集合的交集也是一个集合，因为对于他来说，没有像空集这种东西。这些当然是可以原谅的语言上的怪癖。但是比这更糟糕的是，他不能容忍除了他自己那部分数学之外的其余部分数学：代数和分析都是另外的学科，都是竞争对手，都是敌人。这很糟糕。这使他成为较差的数学家，而他的天才本来可以成为更好的数学家，同时使他的不那么有才能的学生得到更差的教育，更没用，而本来他们可以更好一些。

他是得克萨斯人，几乎是虚构的原型。他说得克萨斯话，他政治上严格僵硬，有着强烈的偏见。当女士进屋时，他起立相见，并（如传说所说）不愿接受黑人学生、女学生、外国学生或犹太学生（至少上述说法部分有错，他有一个女哲学博士生，著名的玛丽·埃仑·埃斯提尔·卢丁（Mary Ellen Estill Rudin）。据我所知，他没有黑人学生。

当我第一次听到他时，我对他的传奇很感兴趣，然而对他的情感上却是中立的，我总是对南方人（包括得克萨斯）有一种又爱又憎的情感。仅就它代表的老式上流社会的礼貌，温和的谈吐，温暖的天气和赛马场的薄荷饮料而言，我很喜欢并愿身居其中——但它所代表的偏见、偏激、憎恨和暴力，我又十分厌恶。当然，有着悦耳的音调和属于青年的优雅的南方温柔的美女，我当然觉得很动人；但那年老的昔日的美女，中年或老年的恶妇，自私苛求贪婪和专制——这会使我掉头尽快跑掉。穆尔，这位受过良好教育、谈吐得体的得克萨斯杰出的数学家，是我心目中的英雄；穆尔，这位数学上过时而且有种族偏见的反动派，又成为我心目中的恶棍。



R·L·穆尔，1966 年

每个人都承认他是卓有建树的英雄又是一个能量很大的恶棍。他在数学领域，培养出破记录的大量的哲学博士。他们热爱他，尽可能效法他。他用一种现已被称为穆尔教学法的方式来培养，这种方法现在也被称为得克萨斯法或苏格拉底法或发现法或业余者自学法，我希望我能看到它在起作用，而不仅仅听到或读到它。后来，用修改过的方式进行试验，我渐渐了解了一点穆尔，我确实有一次看到这种方法实行一小时。有一次，当我路经奥斯汀时，我鼓起勇气敲开了穆尔办公室的门。他彬彬有礼地接待了我并乐于谈他的方法。我很喜欢这个老人——在某些方面，他可能会有缺点和错误，但他坚强且有同情心，与他谈话友善风趣。总的来说，我喜欢并敬佩他。(我非常高兴地记得，当我要和他留影的时候，他坚持要先梳理一下头发——他口袋里总有一把梳子——同时他还告诉我他不愿意笑——他

解释说装出来的笑使他看起来很傻)。他好像还能容忍我，他邀请我再来访问，我答应了。

就这样，可能在奥斯汀我见了他四五面。有一次，他邀请我听他正在教的微积分课，那是我看见穆尔唯一一次实施他的方法（我看过关于他的电影，挑战教学——实际上我看过了四次——但那是在远处见到他表演，而不是真人真事。然而，那也很好——我热情地推荐它)。他一切都很完美，他能启发学生，他令人感兴趣，他不使任何人厌烦，他的人格魅力支配着整个教室。

那么什么是穆尔教学法？它始于一个初步的访问：每一个未来的学生必须首先去拜见穆尔并回答关于他的数学背景的问题。如果他已经学过与他要求被批准去修的相近的课程，如果他知道得太多，那么答案就是一个否定的——他没希望了。游戏的基本规则是所有的参加者都必须从同一起点开始，并且特别要指出的是，一定要未受过其他人的专门术语、符号、方法、结果和观点的训练。第二条规则是对于学生，一旦他被收下了，一定要积极地思考，而不能被动地读书。于是故事开始，穆尔会让学生用他们的人格担保，当他们跟他一起学这门课程的时候，不去读有关这门学科的书，并以他们的方式，减少诱惑。他会从图书馆搬走所有有关的书和杂志，现在课准备开始了。

在第一节课上，穆尔会给基本名词下定义，然后让全班学生去发现它们之间的关系，或者根据主题、程度和学生的不同，明确陈述一个、二个或三个定理，下课。下一节课，“史密斯先生，请证明定理1。噢！你不会？非常好，琼先生，你？不会？鲁滨逊先生？不会？好，让我们跳过定理1，以后再来学。定理2怎么样，史密斯先生？”总有人几乎能做些事情的。如果不能，下课。发现穆尔真正的意思，不占课上很长时间。不久，学生

们将会证明这些定理并用急切的目光观看别人的证明。规则之一是你一定不能让错的东西轻易过去——如果正在给出证明的某人出现了错误，你有责任（还是愉快的特权?）让大家注意，如果可能的话，提出纠正或最低限度，提问一个学生。

这个过程很快就把学生按优劣排成一个顺序，而这个顺序一旦确立，穆尔会首先提问最差的学生，这有两个结果：一是它阻止课堂变成最好学生形成的不被打断的一系列讲演，还有它在班上造成了激烈竞争的态度——没有人愿意呆在最低点。穆尔鼓励竞争。不要读书，不要合作——思考，自己做，打败其他人。常常当有人正在给出定理 11 的证明时，一个还没有发现定理 11 证明的学生会留在教室里——每一个学生都能给穆尔以他自己没有任何帮助而得到的解答和发现。听说有一次一个学生正路过一间空教室，通过开着的门，偶然看到画在黑板上的一个图形，这个图形给了他证明的思想，而这个证明直到那时一直困扰着他。这个学生不但没有高兴，相反却变得烦恼和愤怒，因为它剥夺了自己给出这个证明的资格。那会是一种欺骗——他得到了外面的帮助。

于是，如我所说的，我没有真正看到在严肃的数学讲堂上动作中的穆尔，我不能保证我刚刚给出的他的方法的描述细节上是准确的——但是，我已经得知，其精神上是正确的。我试过这种方法，用它搞过试验，接连不断地遇到战术上的问题，做出了看起来适合我所面对的学生和课程的修改——我成为了一个皈依者。

有人说，穆尔教学法唯一可能的结果是招致研究数学家——但我不赞成。我确信，穆尔教学法是教任何事情和所有东西的正确方法——它培养能理解和运用他们所学的知识的学生，它肯定还在学生中逐渐培养研究的态度——对所有的事情

提出问题并要主动地得知其答案——而那不仅在数学研究中，而且在所有的人类事业中都是一件好事。我从穆尔本身明白了一条古老的中国谚语：

耳听为虚
眼见为实
实践出真知

一次在密歇根大学我用类似穆尔的方法教初级微积分。那是一个小班（大约 15 或 16 个学生），它被称作荣誉班。这个名称并不意味着这些学生都是天才，甚至也不意味着他们是主修数学的学生——它只意味着他们比一般人聪明，而且，如它所表现出的，同他们在一起更好合作，更容易相处。这个班的大小正好——至少对我来说是这样，如果它是这个班的两倍大，我认为我不能用穆尔的方法来管理它。我曾经用穆尔方法教过了 3 至 4 个学生的班，有些有 18 至 20 个学生。而后者，就我所关心的来说，是这种方法所能实施的绝对的最大量。在最近一个超过 40 人的班里，我能从学生那里得到相当多的参与，从而避免了连续不断的使人厌烦的长篇演讲的方式——但这种参与仅仅来自大约半个班，另外半个班无论我做什么，都迟钝地坐在那里——在学期结束之前，我甚至不知道他们中大多数人的名字（或许他们也不知道我的名字）。让我顺便提一句，学生太少也很不利——2 个太少，通常 3 个或 4 个也太少，创造出这种愿意合作的竞争气氛，使得这种方法能够奏效需要一个临界质量——理想的班级人数应介于 5 至 15 人之间。

对于我的荣誉微积分班，我没有非常成功的故事可汇报，它运行得足够顺利，我肯定对他们没坏处。期末，他们至少能如

我用任何其他方法教他们那样，使他们为下一门课做好准备。诚然，那是第一次（并且，我很遗憾地说，唯一的一次）我在那种水平的班上试用穆尔教学法。我相信在有更多的经验之后，我能把这种教学法用于普通的班级。

还有一次我用穆尔教学法在一个荣誉班教线性代数。这个班大约有 15 个学生，上课的第一天，我递给每个学生一套订在一起的 19 页材料，我告诉他们现在教材就在他们手中。这 19 页包含着 50 个定理的陈述，再没有别的了。没有定义，没有动机，没有解释——除了 50 个定理没有别的，只是生硬地把它们正确陈述出来，也没有说明的细节。我告诉他们，那就是课程内容。如果你能理解、陈述、证明、例证和应用这 50 个定理，你就懂了这门课程，你就懂了这门课要教给你的关于线性代数的所有东西。

我告诉他们，我不会给你们讲，我不会给你们证明这些定理。当我们进行时，我会一点儿一点儿地告诉你们这些词是什么意思；我会一次一次地指出，这门学科和数学的其他部分有什么关系，但是大多数课堂上的工作得由你们自己来做。我向你们挑战去发现你们自己的证明，我要你们用你们的人格担保，不去查书也不要用其他方式从外界寻求帮助，然后，我会要求你们在课堂上讲述你们已经得出的证明。你们其余的那些还没有在课堂上讲述，继续完全靠你们自己——确认这个发言者给出一个正确的、完全的证明，并查问他还有什么别的有助于理解（例如例证和反证）。

他们盯着我，迷惑不解而愤愤不平——或许甚至怀着敌意。他们从来没听说过这种事情，他们来这儿是学东西的，而现在他们不相信他们能学到。他们怀疑我在试图逃避某些事情，怀疑我在试图放弃我被付给报酬去做的工作。我告诉他们关于

R·I.·穆尔教学法，他们喜欢那个方法，那个方法很有意思。然后，我给他们需要理解的前面两三个定理的陈述的基本定义，然后说："下课"。

这一方法果然奏效。在第二节课上，我说："琼斯，让我们来看看你证明的定理1"，在他们从地面起飞之前，我得把他们拽起来。两个星期之后，他们就能飞起来。他们喜欢这个方法，他们从中学习，讨论这种研究的精神实质——竞争、挫折、荣誉及一切。

如果你是一名教师，并且可能是穆尔教学法的皈依者，不要重复我在线性代数班的学生所犯的错误，不要认为用那种方法你可以偷懒。为了准备穆尔的课程我干了两个月艰苦工作，准备这50个定理，或无论如何让他们就位。我得把这些材料分成一口一口大小的部分，我得把它们排列好以使它变得容易接受，我必须使这门课程像一个整体，能够完全看清楚——当课程结束时，我能希望他们学到什么呢？在课程进行中，我必须不停地准备每节课，对整个课的进程完全控制，我自己必须能证明一切。在课上，我必须每时每刻都靠我自己。我不但必须充当那很容易形成的、难于驾驭的辩论的仲裁者，而且必须明白眼下所讲的东西是什么。当学生讲的东西模糊可疑时，我必须果断而温和地打断他："请你再解释一遍好吗？——我不明白。"

我相信穆尔教学法是最好的教学方法——假使你想试的话，如果你有很大的收获，也不用大惊小怪。

穆尔教学法与涵盖内容

穆尔教学法（或者任何一种教学方法）取得成功的两个最大的障碍是不想在那里学的学生和想在其他地方学的学生。这

两者不是一回事。让我来解释一下。

对不想在那儿学的学生，我给他们提供需要的课程。一个学生来找我要我帮他学点什么，如果是我已经知道的东西，我是非常高兴的。我相信，无论是什么，我能教会他，同时我希望教学过程对我们双方来说会是愉快的。然而，如果他来找我说："我并不真想学这些无聊的东西，但在我毕业和挣大钱之前，需要我得一个'C'"，那么我会不高兴的。

有些大学过去常常要求所有医学预科的学生学数学课程（有时还不只是一门），除了筛选没有其他原因。准备上医学院校的人的数量要比能被获准进医学院校的人的数量多——减少竞争者人数的一条途径是在数学课上给一些人不及格。规定上数学课另一个原因可以用化学家为典型。他们得懂点儿物理，并且为了学物理，他们必须得学一些数学——数学是一门由于多种原因被要求学的，使他们不完全理解并倾向憎恶的一门课程。同样地，商科学校的学生被要求学一些微积分，对他们当中大多数人毫无理由可言，而少数其他人也只是因为心理上的原因：以后在生活中，当他们在有关经济的文章中见到积分符号，他们不应该被吓住。一个由于这样的要求而学这门课程的学生的班级是一个可悲的和使人沮丧的班级。高度激发动机的班级一定会正常学得好，因为他们中大多数人可能去当傻瓜，他们会学到些东西，但是缺少使学习过程愉快和有效的首要先决条件——求知欲，这样就把一切全毁了。它破坏了教学，它破坏了学习，破坏了乐趣。

我们想着理想的大学，充满着强烈好奇心的学生，他们中那些修数学课的学生们的确充满好奇心，因为他们想了解数学，他们可能是未来的医生或化学家或衬衫厂的经理。但是，由于某种原因，他们要想知道数学这种东西是讲什么的，他们自愿

地来找我，要我把数学教给他们。噢！快事！如果那种情况真的发生，我会在那时跳起来。同时，我得到的每一次机会，我都会用穆尔教学法。在我们这个世界上，事情就是这样，我们教师只能用我们所具备的条件，尽我们所能教好书。我们当中有人以好的方式教书而有一些人则不，但我们都把教大量数学作为一种职业。在某种情况下，你要去掉括号，说明你怎样做；而在另外情况下，你要用 $\tan\theta$ 来代 x，又在另一种很少见的情况下，你要把 δ 选作 $\varepsilon/3\sqrt{m}$——根据这些规则，你就不会做错。对于我们这些喜欢数学的教师，这就是生活。我们还有好多时间学习这门学科并且在授课之余，在晚上，在周末，去研究去思考数学——这种生活可真不赖。

无论如何，穆尔教学法对那些不要去那里学的学生不一定适用。它的第二个主要障碍（要去其他地方去学的学生）比第一个小，但却使一些老师吃惊。你怎么能将穆尔教学法用于教数学 307 课，而且还确切知道你们学生要准备明年的数学 407 课程？你没有那种方法“教过”那么多资料，这难道不是真的吗？

是的，那是真的；不，那不是真的。如果说，对那些修数学 307 课程的学生，课程教学大纲要求你把大纲上 31 个定理中的每一个都教给他们——所谓教，就是说陈述定理、证明定理，考试时考问这些定理——从而使他们对于在数学 407 课程中要教的下一批 31 个定理有所准备，那么，你就别耽误，赶快开始讲课——这总比被解职好。然而，如果课程 307 数学是高等微积分，而数学 407 课程是“初等实变函数”（这个故事对任何课程系列中的任意两门其他课也是一样的），那么你就会问你自己（让你们系问它自己），这游戏的目的到底是什么。的确，课程教学大纲本身不是它自己的目标。将 31 条定理放在数学 307 课

程中间的理由就是让学生有能力将来能理解数学 407 课程中的定理，而学会教数学 407 课程中的定理的理由，就是要懂另一些其他的定理（对于数学家来说），或者去理解和应用这些定理（对于化学家和经济学家）。能够理解并能够应用——那就是我们真正试图要去教的，也是穆尔教学法比任何其他方法更好的原因所在。

从我的经验和我同其他使用传统的和改革的穆尔教学法的人的谈话，我得出结论，“所涉及的”教材成为引人注意的离题的内容。有人说，其它方法能用更少的时间教更多的内容，也有人说，穆尔教学法是奢侈品，我们负担不起。我肯定那是错的，我强烈地感觉到，它足以强烈地去打断穆尔教学法的讨论，并讲一些关于“教材内容”的事情。

对那些没有学过微积分 1 课程的人试图去教给他们微积分课程是徒劳的——那好像是足够真实的，然而，让我来问几件事：用穆尔教学法还是不用穆尔教学法——微积分 1 课程的教师讲述教学大纲所要求的六章，因此，通过微积分 1 课程的学生已经准备好从第 VII 章开始，这是真的吗？听一下教微积分 2 的课程的教师发的牢骚吧：几乎所有大学的任何一位教微积分 2 课程的教师，都抱怨他们的前任，也就是上一年教微积分 1 课程的教师：“什么，他甚至不提部分分式。我不知道他怎么教的三角代换，学生肯定不懂。我不得不花三个星期补一年级的材料——怪不得我拉课了。”按照教学大纲或不按照教学大纲，用穆尔教学法或不用穆尔教学法，课程 N 所包含的材料永远不会是——几乎从来不是——课程 N+1 所需要的内容。

给那些不会用指数函数的学生教正式的概率论是困难的，我教过一次，很明白地陈述了预备知识（微积分 2 课程或无论你叫它什么），首先要求会对付 e^x，我的 25 个学生中有 5 个知

道它是它自身的导数，有2个学生听到过它基本是具有那种性质的唯一函数的传言。然而，由于他们当中没有人对无穷级数有任何了解（甚至当我“提醒”他们几何级数的求和公式时，他们还感到不舒服），头二三个星期的概率课实际上是教最后二三个星期的微积分2课程（无穷级数是在微积分课本的第九章，可是“没有讲过的那么多。”）

那和穆尔教学法没关系——它看起来只是生活中的一个事实，对于它有什么能做的呢？似乎能做的是对每一门课程有一个明智的课程大纲。一个明智的课程大纲是一个告诉你你必须具备什么工具才能修这门课，并用这个工具来对付它，并告诉你当你修完后，你应该带走什么工具，以便能够对付下一个。开头和结尾都被表述得明明白白，只是参考一本书，也就是主要的材料，并且说“这门课程包括其中前六章”是不够的。更好的办法是：“不可缺少的预备知识有下列10个定理、技巧或公式。①分部积分，课本A，81—93页；课本B，7—11页；课本C，207—234页……”，同样：“课程设计至少涵盖下列31个定理。①逐次积分，在……，等等。”

课程大纲应表述明白但不能僵硬死板。首先不应该试图把一个学期的每分每秒都填满，而应留一部分时间，例如总数的三分之一，去给老师自由支配，这才是比较现实的，以一种真正高等教育的精神来代替一种填鸭的气氛。每个老师应该有，也应该被鼓励有个人的见解。对这门课来讲，哪部分是最美的，哪部分是最有用的或哪部分是最重要的，而且应该给他们以机会，在他们认为合适的时候，在教学中加入他们自己个人的看法。老师不是，也不应该成为一部机器的可互换的零部件，学生也应该有机会去学习不同的观点。一个课程大纲表现出僵硬死板的另外一种方式是认为它固定下来永远不变，这显然是不应该的。

数学在变化，时间在变化，应用在变化，书本也在变化——课程大纲应该根据需要经常地变化，每一年变一次可能是太频繁了，但每10年变一次可能就不太够了——课程委员会能很容易地控制这类事情。

课程大纲对我的概率课在两方面可能有帮助。如果一个学生在他的微积分课应包括的最少教材中看到指数函数或无穷级数，他应该起到他老师的良心的作用。“我们什么时候讲到无穷级数？那真的重要吗？当我明年选统计学3课程时，我需要它吗？”如果微积分教师不教级数，他可以自己查或自己学——在我们现代大学的气氛中，他可能未必，但也不是完全不可能，那就是两方面中的一个：给学生以机会去负责任地做微积分课程大纲。强调一下：课程大纲并不是仅有老师知道的秘密的记分单——它们应在学生手中。课程大纲另一个有用之处是可能会有助于概率论课，是对即将要学概率的学生提出警告：如果你没听说过指数和级数，你就可能遇到麻烦。先去学这些内容，否则就不要学概率论。

课程大纲是一页纸——就它本身来讲，它没有什么魔力。然而，它能起作用的一个原因是，它把责任分配给大家，它有助于师生共同分担责任。如果不是每件事都包括，在课程大纲之中也没什么大不了的，只要每个人都知道它大致包括的内容就行了。漏洞可以填补上，只要我们知道它在哪里。

我的许多同事对学生们会在书中查找并自己去学些东西的可能性持悲观态度（或许他们仅仅是比较现实或是讽刺？）我们当中许多人认为，学生是笨的，受到的训练很差，他们必须一勺一勺地喂。的确，有时可能是这样，但如果我们相信这总是真的，我们就永远不会对此做出任何改变。在商科学校，学生们太笨以致学不会微积分，除了一勺一勺地喂。甚至在那时，如

果我们教给他们的只是一连串数学法则，那么尽力把这些数学法则教给他们是否真的明智？有的书写得很差还很难读懂，有的学生很笨或学得很差——但是如果我们总是过分现实地对此做出反应而根本不去试图改变现状，那我们几乎可以肯定会变得更糟糕。

精心设计的课程大纲对高级课程、研究生课程乃至普通课程都有极大的帮助。研究生自愿来找我们学——这比大多数未毕业的大学生积极得多——而且他们也不那么害怕自学。课程大纲还会有助于课程顺利进行，在你报名修复变课程时，你最好知道集合的闭包是什么，它们会对跨几门课的考试系统的那部分有极大帮助：大多数培养哲学博士的计划都有一个资格考试作为它的主要部分。学生们不断地抱怨他们去年跟琼斯学代数，而今年教这门课的鲁滨逊，强调完全不同的主题，而他又是出考试题的人。如果琼斯和鲁滨逊都被一篇好的课程大纲所约束（至少三分之二地约束），一切抱怨的理由可能就会一扫而空。

课程大纲也会对老师有所帮助。即使是一个拖拖拉拉的老师，到期末还有两个星期的时候才发现课程大纲上还有 6 个星期的课没讲，你可以不用 6 周，而用两周讲最后 12 个定理。如果你还有 6 个星期，把所有计算仔细弄一遍，你甚至可以干得更好。怎么办？对每一个定理，描述它所从属的上下文，叙述它产生的历史，讲出得到它的逻辑的和心理的动机，会使定理令人感兴趣。接着陈述定理，一开始可以是粗线条地、直观地陈述，然后是精确地陈述，最后，应用这个定理——表明它与其他结果的联系和由此得出的结果。随意取任何你喜欢的定理，设想你自己来做——射影几何学基本定理，或伽罗瓦理论的基本定理，或者甚至是微积分的基本定理，或者如果你愿意的话，

范围不那么大的结果，例如交错群的单性，或者构造康托尔函数。你的学生在没有看见你把细心准备的复杂证明写在黑板上时，就不得不去做。他们真的失去很多吗？证明能够被查到，而一个定理的前因后果、历史、动机和应用则是很难找到的——那就是真正需要老师来教的。

如果你按照我刚刚讲述的去做，那么，你已经在部分地运用一个改进了的穆尔教学法，你因为什么落在课程大纲之后就没有关系——不管是因为你在课堂上讲了太多的笑话，因为在最初的证明中你弄混了，还是因为你按穆尔教学法诱导你的学生得出最初的证明。那是我的观点，我仍然为它辩护。我刚刚说的是你甚至能稍加变通，使穆尔教学法适合去“涵盖”先前固定的教材。你将比你的教课的同事概括得又多又好（即引导你的学生，由他们自己发现和证明的那部分）。你会概括它的一部分，除了证明的细节之外，所有的都很好涵盖以致于使你的按照穆尔教学法训练的学生不可能忘掉你为他们做的，也就是你训练他们，由他们自己去做的事。

怎样作一名专业人员

安娜是芝加哥数学系的一位秘书。一次，当我们在一次晚会上相遇时，她已经喝完了几瓶杜松子酒和汽水后向我抱怨。她是一位出色的打字员，她没费什么劲就学会专门的数学打字技术——但是她恨打字的每一分钟。你得单独地看每一个符号，你得不停地改变“按键”或电动打字机的字球，碰到指数和下标，你得上下移动半行，你不知道你在干什么。她说：“我不打算上下敲打那个该死的打字机托架来度过我的一生。”

另一次，一位著名的数学家布鲁诺问我：“你怎么使你在数

学科学学术会议理事会召开的会议上的10篇讲演一样长?有的讲演长一点儿是不是真的?当我做讲演时，我的讲演有的45分钟，而有的75分钟。”

最近我问我的一个同事卡尔文(Calvin)“你能不能让一个研究生搭车参加这个月的瓦巴什的泛函分析讨论会?”他说“不行，你最好找别人，我已经不去了，这个月做两次研讨会的报告，足够让我跑了。”

我没有修饰其中任何一个(除了名字之外)，你看出这三个故事有什么相同之处吗?在我看来很显然，它映入眼帘，使我惊骇。安娜、布鲁诺和卡尔文所具有的和表达的情绪是普遍的和不好的：它是一种“自我”的态度，它是说“我只做对我来说是重要的事，对我来说，我比事业重要。”

我认为一个汽车传动系统修理工应尽力去当一名他有能力成为的最好的汽车传动系统修理工，而厨师长、大学校长，卖鞋的售货员和泥瓦匠的助手都应该在他们的职业上力求完美。如果你可能的话，尽力去提高和改善现状，如果你必须的话，改变你的职业。但只要你是一个泥瓦匠的助手，就要不停地搬运砖瓦。如果你打算成为一名数学家，你必须学习这个职业中的每个部分，然后尽你所能去钻研它、教授它，全心全意地去体验和享受它。如果你不停地问：“它对我有什么好处?”你就选错了职业。你如果追求舒适、金钱、名声和荣耀，你可能得不到它们，但如果你不停地尽力去当一名数学家，你可能会做到。

一位艺术家必须了解他的媒体并尽最大可能去利用它。如果你打算要画一张缩图，不要抱怨你的空间不够。尺寸是一个媒体的内在部分，你必须适应它，就像你适应在山顶上呼吸一样——你别无选择。那就是为什么布鲁诺的问题在我听起来就像是问米开朗基罗的雕像是不是用C调或者萨克莱没用钴蓝

写字一样。决定每一个创造的艺术的重要部分是表现它的媒体。所谓1小时的报告，按照它最通常的定义，是一个50分钟的演讲，不是你的书里的一章或你新近关于调和分析的工作的一个完全的论述。当你同意做一个1小时的报告，你就尽你最大努力去做1小时的报告，给听众的水平留有余地，估计被问题打断的概率，把材料组织得适合媒体。

我不是对卡尔文说教，但如果我真的说教，我本来可以说你连想都不用想就应支持一种像瓦巴什讨论班的活动（后面我将详细介绍那个讨论班）——它是职业生涯的一个主要组成部分。你参加这类讨论班，就像你早上穿好衣服，与街上同你碰见的相识的人友好地打招呼，或在晚上睡觉前刷牙一样。这些事有时你觉得喜欢做而有时则不然，但你总是在做——那是生活的一部分，你别无选择。你不要期望因为你做而得到奖赏，因为不做而受到惩罚。你不要去想——只是去做好了。

一个专业人员必须了解他的职业的每一个部分并且（我们都希望）喜欢这个职业。对于数学这个职业，正如大多数其他职业一样，有许多领域要了解。作为一个数学家，你必须得知道怎样当一个门房，怎样当一位秘书，当一名商人，做一名参加集会的人，当一位教育顾问，当一位访问学者，最后但不是最不重要的，事实上是最重要的，是怎样当一位学者。

作为一名数学家，你一定得用黑板，你应该知道哪些黑板是好的，并且知道什么是擦黑板的最好方法和最佳时间。粉笔和板擦的种类很多，你能不能只用最坏的也能同样干好事。在有些讲演厅，你无法选择——你必须用高射投影器，如果你事先没准备好透明胶片，你的听众就麻烦了。文字处理器和打字机，计算机软盘和提起的色带——对它们无知永远不会带来愉快。你愿意复写你的预印本，还是用油印机、简易影印机或是

复印机去复印？谁应该对这些零碎事情做出决定——你，还是一点不关心你的职业的其他什么人？

时常有人会向你咨询。一位工厂主会向你请教一个啤酒瓶的最佳外型，一位系主任会向你咨询他的数学系的地位，一个出版社会向你咨询计划要写的关于模糊上同调的教科书的可能销售量。他们可能会是很有礼貌，但甚至没有提及对你的服务支付费用，而在其他时候，他们可能会得体地提到没有具体规定酬金的数目要到以后支付。他们会以同样的方式对待一位外科医生、一位律师或是一位建筑师吗？你会吗？你能吗？

有时我真想告诉人们我是一名真正的博士，但不是医生。我受的教育比他们的律师所受的教育长得多，花费至少也同样多。我的时间和专门的知识技能至少也和他们建筑师的一样值钱。事实上，我没有用过强硬的语言。我很早以前就决定不再接受“酬金”，除了预先就讲清楚而且达成协议的服务费用外。几年前有人要我评论我没那么多时间去评论的更多的教科书，我会告诉向我咨询的出版社，我的收费是每页打字纸收一美元或者每小时 50 美元。有时答复是：“噢！抱歉，我们真不想花那么多钱。”另外时候事实上答复是“好吧！把你的账单连同报告一起寄来”。结果是我做那类工作少了，而对我仍在做的和我得到的报酬反而有可观的增加。我的当医生、律师和建筑师的朋友们告诉我，自从我规定了我的价格之后，价格有了改变，他们说，到了把这种收费加倍的时候了。他们预言，加倍以后我所得到的答复还是一样：一半答“不”，一半答“当然行”。

一位职业数学家在午饭或喝茶时谈论数学，谈话题目不一定得是热门的新定理和证明（根据话题不同，可能导致溃疡或狂喜）——它也可以是一种新的教学新招，或是对于学生一场淘气的阴谋诡计的抱怨，或是四色定理证明的一个错误的传言。

在许多好大学里，有自带午饭上班（或系俱乐部）一起用数学午餐的长期传统，他们是高质量的重要组成部分，他们保持着系里成员的相互接触，他们使每一个人运用所有人的大脑和记忆更容易。在几所大学里，我参与建立午餐传统，该传统后来确立，并在我离开很久之后还盛行。

这些赞成者们去座谈会、讨论班、会议、学术会议以及国际数学家大会——他们对每次活动都使用正确的词汇。赞成者们互相邀请在他们的大学里的讨论会上做报告，而来访者知道——也应该知道——他的职责不是通过一个星期四下午 4 点 10 分到 5 点的报告完成任务。午饭，是给当地的一些人一个会面机会并同客人进行一次轻松的谈话。下午 2 时可能举行小范围专家讨论班，3 点钟举行报告前的自由交谈聚会（有咖啡招待），讲演后的晚餐和晚上聚会都是来访者的工作中必不可少的部分。这一天让人累得精疲力尽，但这是一位讨论会报告者应该干的工作。

有时，你不仅仅是一个讨论班的讲演者，而且还是“1909 级的杰出访问学者”，被邀请到校园度过整一星期，做二三个数学报告和一个“一般性”演讲，而其余时间，交往、请教和互相影响，有人就是这么干的。星期一下午及时到达做报告，星期二挤进在 110 英里以外的一个姐妹校的讨论会，星期三重新露面做报告，星期四的一大半主要是和安排这次访问的专家密友一起度过，然后赶上下午 6：05 分回家的飞机。恶劣表现——未履行义务与不履行义务——那完全不是访问学者应该表现的。当庞比埃里（Bombieri）来到布卢明顿时，我听懂了他第一个讲演中的许多东西。第二个讲演我几乎什么都听不懂，而第三个讲演我就放弃了（我用这个时间来回信）——但是我因为他的光临，学到了很多东西。我听到他在星期一午餐时滔滔不

绝地谈论亚纯函数，在星期二下午用喝咖啡的时间讲解莫德尔猜想以及星期五晚餐时，推测距今一百年的欧拉和高斯的可能的看法。我们还谈论到钟表、孩子、运动和酒。我学到了一些数学，我还对使一个人成为我们时代标志的杰出数学家有了一些见解。作为一位杰出访问学者，他赢得了成功，但这并不是因为他是一位伟大的数学家（这当然有帮助），而是因为他认真地对待他的工作。做到那些并不需要他的天才，那是我们这些没那么有天才的人也能做到的事情。

数学天才可能是天生的，但是除此之外，一个真正的职业数学家的最重要的品性是学者品质。学者总是在学习，总是时刻急切地学习。学者懂得他的专业和整个学科领域的联系。他不仅知道他的专业知识的技术细节，而且了解它的历史和当前状况。他了解研究这个分支的其他的人并知道他们已经进展到什么程度。他熟悉文献，不相信任何人。他自己查阅原始论文，他不仅获取它们学术内容的第一手材料，而且得到其发表日期、作者姓名拼写和题目里的标点的第一手材料。他坚持绝对直接获得每一篇参考文献的每个细节。学者要尽可能地扩大自己的知识面，没有人能懂得数学的全部，但是学者能成功地了解全部数学的概要：它包括哪些部分，它们在整个数学中的地位是什么？

这些就是造就一位专业学者的事情或者也可说是其中的一些事情。

对教学的沉思

我的职业的一大部分是去教授——也就是当教授、当老师——我在课内外做了大量的教学工作，是否从中学会了什么职

业的诀窍?

不,不是真的,有些事情是显而易见的:要去教一门课,你必须懂这门课,你必须喜欢这门课,你还应该了解你的学生并认真对待他们。无论何时,你一定能预料到并避免他们的困难和误解。作为一名教师,你得处处像父母一样,你必须随时准备好比你准备的复变课程之外更多课程的实际建议:"我在选高等微积分课前选线性代数课吗?"(为什么不能?)在计算机科学中,我需要所有这种数学材料做主修课吗?(如果你需要问这样一个问题,你就不应该学计算机科学)。"如果我离开一年去欧洲,我的学业有损失吗?(肯定,中途退学的学生决不会完成他的学业——几乎没有过)。

关于日常教学的机械运行的方向,说了和写了许多管理上的废话,一个典型的例子是关于学期、学季之间的争论:每一方的拥护者都相信,另一方是魔鬼的发明。一方说,学季制很好地利用了12个月,而不会浪费一年中的3个月;另一方说,学季制在9个月中三次注册和三次期末考试而不是两次,又麻烦又没有效率。一些人说,一个学期足够长,足以教授适当份量的教材,而另一些人说,学季制使得我们有可能提供丰富多彩的教材。在我看来,所有这些争论都是胡说八道。我在这两种体制下工作多年,我确信教育上和智力上,使用这两种体制没有一点区别。你只要告诉我科目是什么,学期什么时候开始,什么时候结束,两次课之间要多久和多长时间,这样我就能安排适合那些条件的课程。当然,我不会在10周内"结束"解析几何课——你曾在15周内结束过什么课吗?(顺便说,这个特别的争执,看起来似乎注定不久就要提出讨论——学季派看来走向失败,而合理化的学期,即劳动节至圣诞节之间的学期,几乎到处赢得胜利。)

如果办公大楼的总时间表设计者被告之说，假如大学两学期制改为学季制，你做的工作就得按分钟计算。微积分1过去总是每15周内每周3节课，每节课50分钟，不到感恩节——那就是2200｛=〔（3×14）+2〕×50｝分钟。在11周内上同样的课，我们就得一周上四节课——就这么简单，当我们要在12周的夏季学期，开设一门包括微积分1和微积分2的浓缩课程时，同样的问题会出现。算术教科书要求我们必须每星期上366.66（=4400/12）分钟，一个可行的概算是安排从5月末到8月中，每星期5天，每天安排75分钟一节课，除去7月4日放假一天。

我们是在嘲笑想像中的恶鬼——实际上经常进行这种计算，然后根据它们做出决定。如果高等教育增长过快，使数以千计的学生在10分钟内改变课程成为可能，我们所做的全部就是改变一小时的定义——我也没有发明这招。有些地方，每天的第一节课是从早晨8：00点至8：50。第二节课从9：05至9：55，第三节从10：10至11：00等等。结果：授课时间还是50分钟，课间休息变成15分钟（或许是一个世纪以前根据神的旨意建立的），一门课的总分钟数仍和以前一样，一片混乱。

所有这些都是一派胡言，学一门难的，刺激人去努力克服困难的课程（比如说微积分），我们所干的是靠完善的准备，而不是用花费多少分钟来衡量。完全掌握新的想法，使它渗入到你的潜意识当中，使得你能很容易记住并使用它们，这要花时间。对大多数人来说，学习微积分要几个月——一年左右——的时间，在如此宽的时间限度之内，花费多少分钟完全无关紧要。

当我们把一年分成恰当数量的星期，再把星期分成由适当的分钟数组成的小时以后，主要的问题仍然存在：我们怎样教

数学？我们怎样才能教会学生会直观、认知和理解？我们怎样使得我们教过之后，我们教过的学生，不仅能通过说出这些概念和听到它们的联系就通过考试，而且他还能从他的洞察中获得乐趣，和其他人一起分享，并应用它于“现实世界”当中，并且，如果他有天赋和机遇，能够保证他做出一个新的发现？

答案是我们不能。对个人来讲，分享人类缓缓获得的理解的唯一办法是重复原来的步骤。当然，某些老的想法是错误的，而某些可能会成为与今天世界不相干的，从而不再时髦。但是，总的来说每个学生必须重复所有这些步骤——个体发育史每次都必定重演系统发育史。

那么为了谋生，我们能做什么呢？今天的数学家对刚刚露头的明天的数学家能有什么用处吗？是的，我们能给学生指出正确的方向，给他们提出富有挑战性的问题，就有可能使他们“记住”这些解答。一旦这些解答开始产生出来，我们就能对这些解答进行评论，我们能把它们与其他的解答连系在一起，我们能鼓励他们进行推广，我们所能做的几乎最坏的事也就是在精心准备的讲课中塞满从丰富的和昂贵的学术杂志和书籍得来的最新消息，而这我确信，完全是浪费时间。

你可以看到，我确信，我正在又一次地倡导类似穆尔教学法的某些东西。挑战是现存的最好的教学工具，无论是算术还是泛函分析，无论是对中学代数还是对研究生拓扑学。当我教大学一年级代数时，我向我的学生挑战，要他们求解二次方程 $cx^2+bx+a=0$，一些学生变得心烦意乱十分生气（“不公平——肮脏的把戏”），但他们所有的人（除了最好的两三个）从这个技巧中学到了一些东西。还有一次，我要他们以曲线表示 $y=x^5-5x^3+5x$ 的同样结果（设 x 跑过值 -2，-1，0，$+1$ 和 $+2$，y 也同样，在那个小测验中，半条图象曲线是直线。）

这只是一点无害的娱乐，谈不上什么挑战，但是学微积分的大多数学生似乎都能体会到。我叫来几名学生，要求他们告诉我$\int\frac{dx}{x}$，$\int\frac{du}{u}$，$\int\frac{dz}{z}$，$\int\frac{da}{a}$ 是什么，这部分是为了做积分练习，部分是引起对“哑变量”的使用的注意，然后为了巩固这个成果，我就问什么是 $\int\frac{d\ (cabin)}{cabin}$。有的人就友好地咧嘴一笑喊出来“log cabin”，而当我告诉他们我不同意时，他们感到十分吃惊。正确答案是我在学微积分时学到的“house-boat”——“log cabin plus sea。”[①]

顺便说一下，与此同时，我利用这个机会告诉一个对数为2的指数不是10^2而是e^2，这就是数学家使用语言的方法。用ln表示自然对数是教科书的通俗用法，你有没有听说过数学家谈到过lnZ的黎曼曲面？至于谈到通俗化，你是否听到过数学家把－3念成“negative three”？[②]

这些事情使我回想起一些各种不同水平的考试的试题，它们得到他们应得的传奇的地位。有一次在一次哲学博士生资格的口试中，有这么一个故事。该轮到东屋（Azumaya）问问题。“伽罗瓦？”他问，这就是他问的全部问题。于是这个学生扭头就跑。一个同样的故事发生在佐恩上高级微积分课的班上的笔试中。他把它写在黑板上，它看起来全部就像这样：

$$e^x。$$

佐恩否认这个故事，但我仍然喜欢这个故事，它难道没给

① 作者用巧妙的文字游戏使学生巩固他们的知识。cabin是小屋或船里小舱房，log一语双关，既是对数符号又是英语字当木头讲，log cabin意即木制小屋，house-boat为居住的船只，log cabin plus sea为水上的木制小屋，即居住船只。——译者注。

② －3应读成minus three。——译者注

你一个想法？按照佐恩的说法，它是一门研究生课程，考试题看起来像这样：

Sin z

还有一个，这次是关于塔马尔金（Tamarkin）的。在一次哲学博士生口试中，他问学生关于某一个超几何级数的收敛性质。这个学生说："我不记得了，但是如果我需要，我可以随时查到。"塔马尔金不高兴了。"那可不见得"，他说，"因为你肯定现在就需要它。"

后来，还有关于塔马尔金的故事，不是关于考试，但意思也差不多。塔马尔金声称他将在某一个秋天提供一个连续系列的讲课，实际上是两门课，因此持续不是一个学年而是两个学年。整个系列的课的前半部在4月结束，后半部按计划在10月结束。学生们到齐了，塔马尔金大步走进，拿起一支粉笔，开始讲"因此，……"。

让我们回到用挑战的方式来进行教学的议题上，在所有无论是初等水平还是高等水平的运用的这个方法具本质的方面，注意力集中在确定的、具体的和特殊的问题上来。一旦一个学生明白了，确实和真正明白了，为什么 3×5 和 5×3 相同，那么他就很快地得到了自动的和显然的但依然是使人兴奋的，不可动摇的推广的信念，那就是对所有其他的数，"它也一样成立。"我们都有概括的内在本能，老师的作用就是去唤起对具体的特殊的情形的注意，而这种特例中隐藏着（而且我们希望它最终也揭示出）概念困难的萌芽。

"实变量"一般从皮亚诺公理开始，进而讲有理数（它是作为有序整数对的等价类来讲的），然后通过戴德金分割（经典方法）过渡到实数，这种教法实在是一桩罪恶。我们不应该从显

然的公理和人为的定义开始，而应该从有趣的事实开始。我们可以先讲一些例子：奇怪的数（刘维尔超越数，上课第一天就能懂），奇怪的闭集（没有什么比康托尔集更好）以及奇怪的函数（无理数的特征函数也有它的用处）。注视例子和反例，注视连续函数和不连续函数，注意一致收敛及非一致收敛。把这些东西搞得友好和熟悉，就像我们在小学全都是3，5，15的朋友，**然后**提出问题：什么可能是到达这里的最好的出发点，一般永远是从负无穷走向正无穷，但是远为更好的方法是从中间走向两端。

以挑战的方式进行教学的最困难的部分是把你的嘴闭住，克制，不要说，而要去问！不要用正确的B去取代错误的A，而是要问："A是怎么来的？"不断地问"对吗？你肯定吗？"不要说"不"，要问"为什么？"

怎样指导博士论文

听人传说，希尔伯特曾经说过，指导一个哲学博士的学位论文，就像在极度痛苦的情况下写论文。他说得对，基本上是对的。指导一个哲学博士生是一种教学工作，可能是最富挑战性和最有趣的一种，它是作为数学家职业的一部分，它像许多职业的许多部分一样，所做的事情就是埋怨它。然而，学生走近你并要求你做他的学位论文的导师，这多少也是一种荣誉——对于教授来讲，去接近学生是一种坏的形式，非常坏的形式。当然，它也会发生，也经常奏效（哪个研究生胆敢说不？）但如果你这样做，你就能指望有人向你皱眉头，说闲话（我就会在那里皱眉头，说闲话）。

讲课是多种教学方法中的一种，或许是最容易的一种，但

当然不是最好的一种。我敢肯定，我们都知道一些十分糟糕的讲课——我所知道的最坏的一课就是我认识的最好的一位老师讲的。他和我共事几年，而他，这最坏的讲课教师，经常吸引最有天赋的学生并教出最好的哲学博士。他鼓励他们，打扰他们，刺激他们去取得更高的成就。他和他们一起战斗并为他们而战斗，就像牡蛎中的令人不快的少许沙粒，它产出的是珍珠。

哲学博士生和他的指导教师之间的关系是一种奇特的关系。你可以想到，一个学生喜欢比方说有限群，于是他找一位有限群方面的专家来当他的指导教师。有时，他找得到，但通常，生活并不是这么简单。开始时，一个学生选择他去的研究生院，部分地因为在他父母家附近，部分是听从了他大学老师的建议，部分是因为在那里他能够得到研究生奖学金，而很大部分是出于偶然。一旦他进入研究生院，他的确可以换研究生院或到别的地方去找理想的指导教师——但他不太可能，因为这样，他将不得不面对新的官僚主义，需要各种机构的批准。由于是州外居民所带来的种种障碍以及新的不同的考试制度，惯性的力量是巨大的，最好还是留在原地不动。因此他必须从他碰巧所呆的地方，从数学上很活跃的人们当中选择他的指导教师——要不没有人对他的有限群感兴趣，或者有兴趣的人太忙以致不接受他，他只能改变搞微分拓扑学。

青年和中年教授都渴望被看成是重要人物，都急切地想得到哲学博士生，如果他们如愿的话，这将对他们十分有利——这是他们工作业绩的一部分。如果你没有任何博士生去指导，那当你的上级讨论你的提工资、终身职位时，这些情况也会被注意到。

学位论文的指导教师最困难的事是让学生启动——给这个学生提出一个问题去做。有的指导教师交给一个学生一个定理

说“去证明它”，其他人则完全相反。例如：一位哥伦比亚大学学生到萨米·爱仑伯格（Sammy Eilenberg）的办公室说：“老师，我想写博士论文”，萨米说：“为什么不呢？”我还应该加一句，为了对所有的人都公平，按照这个故事的另一种说法，在萨米使之改变之前，过去常有的就是这种哥伦比亚大学态度，另一种可能是编造的传说，是属于马歇尔·斯通的，如果我有什么好的题目，据说他自己曾经说过：“我自己会去做的”。

找到、发现和发明（?）好的新问题是不容易的，我认识的人当中的几个，一旦他们幸运地偶然发现注定是有收获的问题，他就像一个守财奴一样——他们将它收藏起来，严格保密，因怕有人会从他们那里将它偷走而怕得要死。我认为这无论是从道德还是从策略上说都是错误的。按照我的经验，更好的办法还是“往水里扔面包，因为你在许多天后会找到它。”（圣经传道书 11 章 1 节）。甚至是我向一个学生讲解一个空泛问题的可能性就时不时地使我产生新的思想，而在喝咖啡休息时间向一位同事谈起这种可能性，结果更像是得到一个礼物而不是被偷窃。从某个人对你的问题不经意的反应，也能向你提出一种完全新的方向去考虑——而且注意！也许几个月之后，你的模糊的想法会变成了一条定理，后面加上对你喝咖啡的伙伴的见解表示感激的注脚。

诺尔曼·斯廷洛德（Norman Steenrod）当描述他怎样引导与将成为他带学位论文的学生的初步讨论时，他用了一个迷人的惯用语。它不是给出一个题目的问题，他说：“它只是在指出一个有趣的‘无知的地区’。”

一旦一个学生开始做这个题目，就存在一条微妙的界限，论文导师不得不踩过，而这条界限介乎瓶子里爱管闲事的精灵和令人丧胆的黑暗势力之间，而我知道这两个极端的情形。

对一个学生来说，替他写学位论文不是对他好——这几乎和与他竞争一样糟糕。正如我上面提到过的，特里金斯基（Trjitzinsky）走向一个极端，而纳特·科布恩（Nate Coburn）[一位密歇根的同事，我的学生刘·科布恩（Lew Coburn）的父亲]不得不把握住自己不走得那么远。纳特患有多发性硬化症，在轮椅上搞教学多年，数学方面他是一个应用分析专家。他有一次告诉我，他决不给学生提出一个问题，除非他自己确有把握能够解决它——而且，当然，使他确信能解决它的唯一方法是已经解决了它。

我不敢说出我认识的学生的竞争者的名字，他们当中的一个会慷慨得给他的学生提出一个研究课题，极大可能是他自己过去已经做过的，或可能是在一段时间里被他暂时放在一旁的。但是一旦学生一开始着手解决这个问题时，他自己的兴趣就重新激发起来。他通宵达旦地干以确保在他的学生之前到达终点。他的确没有培养出许多哲学博士。另一个更狡猾的做法是设置少许障碍。有一次，他给他的学生看一篇他自己的论文，这篇论文是他和一个初学的合作者一起写的，于是他让这个学生尽力去推广它。几周以后，这个学生成功了。这个新结果虽不是惊天动地的，但它是在正确的方向上一步一步向前推进的，对此这个学生自我感觉很好，也就是说，直到第二天下午，当他告诉他的导师他做完了什么之前，他自我感觉很好。老师7秒钟后才做出反应。"当然"，他用他手掌的后部敲着他的前额说："我们怎么能这么笨把那个结果漏掉没有发表！"没过多久，这个学生换了导师。

关于这些方面的民间传说都是讲当学生告诉他结果时教授迅速而不断地改变态度。这种教授立即的反应是"那是平凡无聊的"；"不，等等——噢，不，它是错的——我有一个反例"；

……“别走——噢，当然——是的我知道——3年前在我们出席圣·安东尼奥会议的飞机上，乔和我已经证明了它。”

指导教师不是唯一能设置障碍的人，学生们也有时互相设置障碍。我有两个学生，他们两次要换他们的论文题目，每人两次。一个是那个“证明”了托普利茨谱包含定理和次正规算子无关的那位，他要求我“再给我点别的事干”，另外一人决定换题目仅仅是不喜欢他的题目，“我有两年没有研究算子了，只是花时间去寻找3×3矩阵。”他抱怨道（他的问题涉及矩阵的谱及它的扩张的谱之间的关系，很自然，他必须试图从低维问题情形开始以找到感觉）。

按照我的经验，这些论文很少（从来没有？）以解决原来的问题而告终——他们有这倾向，几个月以后突然向左和向上，以完全没有预料到的方向曲折离去。尤里·莱因尼奇（Yuri Rainich），我一位密歇根的同事，讲了一个像刚才那样的故事。有个学生一开始做一些微分几何的复杂却单调的计算，这个学生一直孜孜不倦地工作，但他并不喜欢。每当他想到他能从那无聊的事中离开几个小时，回到他自己的“无聊”游戏上，是关于布尔代数的一些事情。一年之后，当尤里变得越来越关注他的学生的缓慢的几何进步时，这个故事出现了。尤里很感兴趣，他受到鼓舞并且他郑重地告诉这个学生，布尔的问题并不都是琐屑无聊的。快乐的结果：一篇哲学博士的学位论文产生出对布尔代数的新的刻划。一位哲学博士生对数学的新看法阻止他永久处于不快之中。

另一些哲学博士生

唐·萨拉逊（Don Sarason）是我在密歇根的第一位哲学博

士生。在他认识到数学是他的事业之前，他原想当一名物理学家。他后来同我相处十分愉快。由于唐，我指导博士生的技巧达到最后的定型，而且自那以后一直进展顺利。

“到我的办公室来看我”，我会说，“星期一下午2点，每个星期一。让我们彼此都留出2点到3点的那个小时，即使到头来我们无话可说。在最坏的情形下，我们只是坐着，闷闷地、沉默地盯着一页空白的纸一小时，力图思考出什么。”

这种最坏的情况从来没有发生过，我不是谈论最初的会谈，在那些会谈期间，我们同意一起工作并挑选出“无知的地区”来看看。我正在谈在那以后一次典型的会谈上所发生的事情。实际发生的事情随学生不同而不同。但是，对于所有的学生，这一小时的大部分用来问问题，而他们中的大多数是由我来提问的。很少会发生这种情况：学生在星期一下午到达，一来到就问“……是真的吗？”或“你怎样证明的……？”如果他被难住，那么可能是他甚至不能想到正确的问题。而如果他没有被难住，那么他会急切地报告他的进展。

我的问题是没有准备地激发自由讨论。”如果我们坚持差不仅依范数很小而且紧，会发生什么？这只对射影成立吗？或者对每一偏等度量映射也成立？这两个条件能同时满足吗？”这些问题不总是提得很聪明，但我希望，它们是学生们尽力去解答的主要问题中的有关的子问题。

唐·萨拉逊是一位文静的人，能用7个字表达时他决不用8个字。他是我认识的讲课最流畅、最清晰的人之一，并且他有一种异乎寻常的时间感。要他解释某事需多长时间，他几乎可以精确到分钟。在一小时的讲演中，他需要看一次马路对面的塔上的大钟一眼来精心安排他的讲演，这时他大约已讲完他四分之三的材料。如果还剩12分钟，他就在11分半时结束。他



D·E·萨拉逊，1962 年

讲演之明晰，时间之控制的能力一定是与生俱来的，当他还是学生时就已具备它们，从那时起他一直没有改进——也没有改进的余地。我见到他时，他蓄着浓密的胡子，长长的黑发，用皮筋在脑后扎成个马尾巴。他穿蓝牛仔裤和矮帮系带鞋。那以后两次，他变得不时髦了，剃了胡子，剪了头发——但这两次，恢复到保守的嬉皮士风格并且永久地固定下来。他不仅是天资聪颖，而且认真尽责，勤奋和值得信赖。如果他说他在 3 星期内完成这个书目，他一定会兑现，他会努力于这项工作，而且他会把参考书列得完全正确——出版社、页数、日期及一切。

当我突然地想起问题时，他机智地、默默地点点头，表示他懂了。如果在下周我不记得再提起这个问题，唐也不会再提起它们。如果我真问他"这些幂亚正规算子是什么?"他会说："噢，对了，那是平凡的"，并且给我看他的不平凡的答案。我

仍然拿不准是唐还是埃里特·毕晓普是我最好的学生。幸运的是，我不必去做结论。

唐聪明且反应快，虽然他不讲废话，但他必须讲话时，他一定要讲出来。他有强烈的看法（例如对于政治），但他不强加于你。

一次，他有机会写下我第一次请他吃饭的故事的一部分，但他并没有写出它的全部，他遗漏的是续集。那天饭后，他站在房前，拿着一盒给我妻子的华丽的糖果作为礼物。那时，我妻子出去了，我说她回来时我会给她的。两天以后，我妻子问我是否告诉过唐她多么喜欢这种糖果。我没有告诉过，但我记在一张纸条上。下次我见到唐时我告诉他“我妻子说我是个蠢人——我本来应该早谢谢你的礼物。”“没什么”，他说，“我妈妈告诉我这样做的。”

如果我能懂得一篇学位论文，它有可能不是很好，我不能理解萨拉逊的关于环域上自守函数的艰深技巧——它是美的。在某些例子中，我让学生顺利完成的计算的“弃绝的”过程是假装的，但是在萨拉逊的例子中，它来得容易和自然。弃绝意味着接近结束。当我意识到一个学生做出了一篇论文或接近完成时，我就开始鼓励他作为一名数学家的自尊心。我问他问题，真正的问题，我确实想要知道答案的问题。我由他的判断做决定，我说：“你怎么看这个问题应该加以研究？你的技巧能做出什么结果？还有什么其他重要的问题有待解决？”过了一段时间，它奏效了——渐渐地，学生们开始意识到，他们不再是学生了，他们是数学家了，而这种认识是他们训练的一个重要部分。他们必须逐步懂得在他们的工作中他们做了什么，而如果他们打算进一步去做更多的事情——他们也应该这样做——他们能够这样做，他们必须独立去干。

我以前曾不只一次地说过，完成你的学位论文以后，你能够而且应该做更多的事。为什么你应该这样呢？答案是：只有那样你才真正开始飞起来，只有那样你才独立，只有那样你才成为一名名副其实的数学家。如果一个学生在他25岁时写了一篇关于变分法的学位论文，并在以后不停地发表变分法的论文，直到他65岁，他可能是一名地道的数学家，但是他几乎肯定不是第一流的数学家。独创性、冒险精神、不停地学习和扩展知识领域——所有这些都是成为数学家的必要条件。乔·杜布(Joe Doob)对待它们几乎像是它们也是充分条件一样。我见过几封他写的推荐信(其中一封是推荐我的)，他的最高的赞扬不是"好"，"强"或"深刻"，而是"第二篇论文的主题与学位论文不同。"

唐是我在密歇根的第一个学生，而彼得·罗森塔尔(Peter Rosenthal)是最后一个。看彼得从一个笨嘴拙舌的初学者成长为一名自信的专家是一件趣事，在他写他的学位论文时，一边证明一点，他会一边迟疑：你什么时候结束——什么时候结果加在一起成为一篇学位论文?我告诉他那是我的工作的一部分，我得试着去判断什么时候这些结果可以形成一个整体，一个可测度的贡献它应被接受和发表，他接受了那个说法——但他比我抢先采取行动。后来——我现在回想起来大约6个月以后，他有一天到我这儿来并且说："我想我成了——我想随着那个问题的解决，我现在已经完成了一篇学位论文"，他是对的。

我珍藏着一封我收到的彼得的来信。我告诉他，一旦我们结束了师生关系，就去掉像"哈尔莫斯教授"之类的称呼吧——但他发现把我们的关系擢升到称呼名字的亲密程度很困难，在一封信中，没有办法你称呼名字或不称呼——所以他用这种方式开始："亲爱的P—P—P—Paul(保罗)：你看我称呼你名字

了！”

这仅仅是刚刚擦边，有点关系，而这个故事非常像另外一个使我很感动的故事，那是在一次聚会上。萨米·爱仑伯格是贵宾，萨米的名字是Sammy。大复·哈里森（Dave Harrison）是一位客人，他的职业生涯接近开始。他从来没有以任何其他方式称呼过萨米，谈论到他时总称他塞缪尔（Samuel），就像谈论卡特总统时用詹姆斯一样。在这个聚会上，喝过几杯之后，大复微笑着走到我们这群人面前，愉快地宣布："我这样做了，我这样做了，我管萨米叫萨米了"。

在萨拉逊和罗森塔尔之间，还有一位斯蒂夫·帕洛特（Steve Parrott），一个性格内向的人。我认识斯蒂夫，但仅仅是一个大致的印象，他"不过是一个研究生"。我们第一次个人的接触是关于一件小事。我们当中有几个人习惯把我们的私人咖啡杯挂在一间公用房屋的钩子上。一天，帕洛特打破了我的杯子，当然我生气了，但与此同时，我并不要使这个似乎害羞的、文静的、显然困惑的年青人感到更加局促不安。因此，我用一种显然夸张的口气对他大喊，希望那样比礼貌的客气话更可能使他放心："好啊，斯蒂夫，你的哲学博士生涯来了！"我的声调一定有我希望的那种容易接受的亲近感，他笑了，并且没过多久，就在这一学年，他问我他能否跟着我做博士论文，我答应了。

刘·科伯恩（Lew Coburn）、埃里克·诺德根（Eric Nordgren）和鲍伯·凯利（Bob Kelley）都在萨拉逊之后开始，但他们都在唐完成之前就达到了开始做学位论文的阶段。结果，我们中5个人（唐和我还有三个年轻一点儿的同学）能够安排一个私人讨论班。我愉快地回忆起这个讨论班——当时真是一种乐趣，并且它看起来似乎对我们所有的人都是有用的。我们在

黑板前聚在一起，学位论文的作者会互相说明他们一直在努力做什么以及他们在哪里遇到困难（这些会议是在我同他们每个人的私人会见中进行的）。当然，他们在做不同的题目，但所有的问题都同算子理论有关，并且他们都懂得其他人在谈论些什么［数年之后，当我把这些告诉一位非数学家同事——安娜·哈切尔（Anna Hatcher），一位语言学家——她十分惊骇。谁在写谁的学位论文？她想知道。她似乎不能想像，不成熟想法的自由交换竟能出现而不导致剽窃，R·L·穆尔要碰到这事肯定不会这么去干］。

第十三章　到悉尼去，到莫斯科去，然后回家

悉尼 1964

作为一位数学家，我跑的地方可真不少——这里召开一次学术会议，那里邀请我做一次学术讲演，去另一个地方参加美国数学会的会议。但大多数情形只呆一两个晚上，飞行时间两个小时或4个小时不等。大约到60年代中期，我碰到几个更大的机会去更多地见识世界。其开场锣鼓就是我在1964年1月到悉尼做一次旅行。

职业旅行需要花时间安排，有时要提前半年，有时还要提前一两年。到悉尼旅行来自T·G·鲁姆(Room)的一封信，他邀请我在1964年澳大利亚数学会的暑期研讨班上担任主讲人。他的信是1963年6月写的，暑斯研讨班订于1964年1月7日开始，历时5周。当时我立即答复，很诚恳地表示遗憾我不能去。归根结底，我有我的数学科研工作要做。虽说1月7日在密歇根州是在两个学期当中，可是5周的研讨班就会把第二学期的15周差不多要削去4周，这真是一个大口子。我已经安排给优等生开高级课程微积分，还要给研究生上实函数课。如果

只是两三次课——一周或是多一点——我还可以安排请人代课，可是要让人代4周课可就超出大多数友谊的限度了。况且，大多数代课都给整个课程带来一种令人不快的拼凑效果。

鲁姆邀请我的理由之中，除了他可能加给我的，做为一位讲演者有着的这样那样的优点之外，还有一个就是他和我1957年正好都在普林斯顿，我结识他和他的一家。他是一位矜持的、拘礼的、举止正规得体的英格兰人。他已经去澳大利亚居住了20年（或更长时间），对于他对澳洲的知识非常自豪，但只要一谈到澳大利亚人，他总是说自己是（移民澳洲的）英国人（pommy）（我不知道为什么这个词的意思是“英国人”，但重要的是，它的涵义中有贬义：即它是一个外国人，外来的帝国主义冒险家，而不是自己人。）他的太太和他的女儿们都很漂亮，很友好，很外向。我特别喜爱那时7岁的吉拉尔汀，我真希望我还能记得她教给我的“跳华尔兹的玛蒂尔达”中的每个字。

鲁姆不愿意就这么接受否定的答复，他终于取得相当的成功。富尔布莱特基金会人员同意给他两份半额资助而不是原先计划的一份到国外讲演者的全额资助（再加上双程全额机票）。我非常同意去两周半而不是原来的5周。另一半资助给了拉尔夫·葛默瑞（Ralph Gomory），我不是那时才认识他，而是早就认识。他在我离开悉尼之后一两天到达悉尼。这样，最后安排的计划共有3个“系列讲座”：由我做12次关于算子理论的报告，由葛默瑞做10次关于组合问题的报告，由库尔特·马勒（Kurt Mahler）做4次关于代数数域的报告。由于他当时已定居澳大利亚，因此他出席不需要花费额外的机票费。杰克·麦克劳克林（Jack McLaughlin）和阿伦·布朗（Arlen Brown）同意代我上在安阿伯的课一直到我回去为止。当然，得有一套繁琐手续：向富尔布莱特基金提出申请，体格检查，财务安排，飞



T·G·鲁姆，1964年

机和旅馆订票等等，但这些都是常规事务。像这类事通常总是中间出点差错，然后就基本上顺顺当当一直干完。

1964年元旦星期三早上大约10点，我离开安阿伯，星期五凌晨4点到达南迪的富士机场，这一周我没有过星期四。这个最壮观的中间站是在火奴鲁鲁，我们在当地正好午夜时分到达。以前我曾到过这里，来看望我当眼科大夫的哥哥并访问夏威夷大学。但是这次我来自密歇根冰冷、黑暗、肮脏的冬天，和火奴鲁鲁所带给我们的温暖气候形成强烈而奇特的反差。这里气候温暖宜人，大约21℃，一片春色，姑娘们光着脚穿着木屐走来走去，棕榈树轻轻摇曳，空气中弥漫着鲜花的清香。我想这都是给我的，这里正是我想生活的地方。

周末在富士度过，我于当地时间星期一早晨7点到达悉尼，

我希望这里有比空中旅行更有意思的生活。鲁姆和杰拉尔丁(Geraldine)到机场接我。吃完早饭之后，睡了几小时午睡，我又重新参加到人生竞赛当中。夏季研讨班明天早晨正式开始，但是(我的)头一个讲演在午后4时才开始。

参加夏季研讨班的大约有50或60人，他们大多数当然来自澳大利亚。伯纳德·纽曼(Bernard Neumann)和汉娜·纽曼(Hannah Neumann)来参加了，蒂姆·沃尔(Tim Wall)也来了。延科(Janko)是专门研究单群的，他也来了，但是他只听了我第一个报告，他说，他认为学习希尔伯特空间对他决定全部有限单群并没什么帮助。乔治·塞克莱斯(George Szekeres)是出席研讨班年纪较大的一位，还有许多年轻人，我非常高兴认识他们并和他们谈话，其中有大卫·阿什(David Asche)、唐·巴恩斯(Don Barnes)、迈克尔·巴特勒(Michael Butler)和他的太太希拉·布伦纳(Sheila Brenner)、萨姆·康伦(Sam Conlon)以及杰弗里·伊格尔森(Geoffrey Eagleson)。

报告、午餐、讨论班——从某种意义上来讲，所有学术会议都是同构的，某一个会议真没有多少与众不同之处。我从某一部分学习我已经掌握的这部分数学增加了我的经验，而且我希望它使我成为更好的数学家，但是我已经记不得那是什么场合，那一天，什么地方以及什么来源。有时我记起的东西实际上搞错了。在我1964年在悉尼召开的夏季研讨班上的报告中就有两个地方出了点毛病：水平和笔记。

在我们最早的通信中，我就问起鲁姆，什么是我讲课的正确的水平。我在信中写道“我觉得，我讲课的水平应该是使有智力的、受过教育的数学家达到能够理解的程度，而这些数学家当时正好是在其他领域做研究。换言之，我设想听众既不是

希尔伯特空间的专家，也不是数学的初学者。我这些设想是否合理呢?”鲁姆回信说:“你把听众的水平想得太高了。”谢谢你，鲁姆教授，你真是太好了。事实上，我失掉了我的目标。每一种文化都有它的数学民间传说，当时在澳大利亚数学家中流传的民间传说和在美国数学家中流传的并不一样。澳大利亚数学家比起美国数学家来，懂得更多的代数，但是懂得更少的拓扑学和泛函分析，两个地方的专家，比如说，泛函分析的专家懂得一般多；麻烦在于，澳大利亚的隔行的数学家和他们的学生们对于分析比较生疏，比起他们的美国同行来就似乎更少听到过像一致有界性原理这类的材料，而我，当然就习惯于美国的民间传说的水平。

我第一讲讲到一半时，情况对我已经很明显，我应该调换到更低的档次，于是我就这么办了。鲁姆给我一个启发：我是否愿意在讲课之余，加上几节“辅导”课，使得那些想问，而在讲课中又不敢问的更为初等的基础性的问题?我干过吗?!太棒了！我干了！在我40位听众中有15位参加安排的两次辅导课，其后，听众来听讲的似乎更多了。

关于笔记的故事牵涉到我从安阿伯寄给我自己的又厚又重的包裹，里面全是抽印本和笔记本。笔记记录当时还处于原始状态，后来成为我的一本书，是关于希尔伯特空间问题的。我在悉尼的讲课就是根据这些笔记完成的。这个包裹又大又重以至于我在旅途中随身携带几乎完全不可能，于是空中快递公司答应我，他们会安排好及时寄到。为了保险起见，我在我的行李箱中带上20页的讲课大纲。要是情况变得更糟，我对自己说，我能用大纲激发我的记忆，可以用不着详尽的笔记就能讲下去。

情况真是每况愈下。我第一讲在1月7日进行——没有讲课笔记。8天之后，也就是到了讲课时间过半，仍然没有讲课笔

记，从某种意义上来讲，没有讲课笔记讲课也有好处。他使我讲课更多是临场发挥，除此之外，它还成为一种口实。我告诉我的听众，我的讲课笔记还没有到，因此，每当出现说错写错时，出现迷惑不解时，每当讲不下去时，我都归罪于笔记没到。最终，鲁姆再次伸出救援之手。他打电话给邮局，回答是，没到，应该问空中快递公司；他打电话给国际空中快递公司，回答是没有，应该问美国铁路快递部的空中快递局；他打电话问 Qantas（昆士兰和北方领地空中勤务处），回答是没有，应该问泛美航空公司。一直到 1 月 16 日下午，他最后找到这个包裹，——噢，是啊，它 1 月 11 日就到了悉尼，它 1 月 11 日准时由美国寄出。好了，如果你坚持的话，我们可以把包裹送上门！第二天早上，我向我的听众挥舞这个包裹，他们以热烈的掌声来祝贺我。

我听到的讨论班报告中，有的索然无味，而有些却不。有一位乌克兰中年流亡者，他要是没他母亲在身边连一步都不会迈。他报告时，他的母亲，一位牙掉光了瘦小的老妇人带着一顶大帽子就坐在前排。他的报告可真糟透了。还没报告时，他就写满一黑板符号，然后读给我们听，可是常常连 g 和 j 也分不清。听众中有一个小伙子后来告诉我，他已经把他的助听器关掉。他还告诉我，他的一位朋友试图让他少喝些酒，这位朋友说“酒精对耳朵不好”。这位戴助听器的小伙子花了几秒钟想出他的回答。他最后说，“总的来说，我想，比起我听的来，我还是宁愿去喝酒。”

作为一位数学家，我欣赏悉尼，作为一位旅游者，我至少同样欣赏悉尼。我在一家“私人旅馆”中有一间十分舒适的小套房，这里的所谓私人旅馆意思是没有向公众开放的酒吧。旅馆的建筑是按照英格兰流行的设计方案设计的。为了到我的房

间、你先上楼向左转，然后下两级台阶向右，然后（仿佛）又回到上边再重复走一遍。房间里有空调，非得有空调不可，因为有一天室外温度达到快45℃。电话号码本的黄色纸页已经变成粉红色。收看电视特别好，每平方英寸有更多的像点。有一天晚上我看到“四季中人”的极好节目，1小时20分钟连续播放中间没有穿插任何商业广告。

要是我有任何对匈牙利的思乡病的倾向，到悉尼就会使思乡病更加厉害。我的旅馆靠近国王十字标，这是一种澳大利亚式的格林尼治村庄，在这里我听到人们讲的匈牙利语比我离开匈牙利后所到的任何地方听到的都多。在门前面上挂着几扇牛肋肉的店铺招牌上写着MÉSZÁROS，而不是BUTCHER（肉铺）。讲匈牙利语的有各种年纪的人：老一点的是1938年从希特勒的统治下逃出的难民，而年轻的则是从赫鲁晓夫出兵干涉下逃出的难民。我买了一份“SIDNEY—I MAGYAR ELET”（《悉尼的匈牙利人生活报》）。这是一份可怜的、悲惨的、愤怒的小报。当然它对赫鲁晓夫表示愤怒，它也对美国表示愤怒，因为我们向赫鲁晓夫献殷勤。它对悉尼只是有点恼火；这引起我对匈牙利的思乡病和愤怒情绪。

布达佩斯1964

在二次大战前（1937年）和大战后（1957年）我都想到过要访问匈牙利。那时似乎可能成行，但是，我感到害怕。我倒不特别害怕被征召服兵役（1937年我21岁，而匈牙利在美国的加入美国籍的文件中没有特别提到），也不怕秘密警察（归根结底，我在1957年已是美国人，在铁幕的“反面”一边）——我只是感到害怕。去看看我童年时代的景象，同长期没有联系的

表亲再次建立联系，面对我以前没有时间真正学会的语言和文化如今如何再适应的问题，我从心理上总有着一种不安全感。我的不自在（用“害怕”这个词似乎太强了）表现在我表达我的不快要比我真正感受的还要强烈。我总是讲，我不喜欢匈牙利，我不喜欢匈牙利人，我也不喜欢匈牙利语。当我在1964年被邀请在布达佩斯的波耶·雅诺什数学会上做报告时，我感到一种双重情绪：的确，它可能令人激动和有趣，反过来，也可能令人感到不舒服和不快乐。在动摇中我作出决定：接受邀请到匈牙利去。

这次旅行一共8天，从进门到出门整整一周，星期天到也是星期天离开，是春末夏初时节，这样我就不必缺课。我开始去时不很友好，我想回来时也是一样，但是我想错了。比起一开始似乎证明我的态度是正确的那些让人讨厌的事情来，有些事情给我留下更深的印象。我赌咒发誓，我决不再回匈牙利去，可是一年以后我又去了匈牙利，后来又去过多次，它也不是那么坏。但是我要开始讲，它是多么坏。

从我最后看到大量匈牙利人时算起，已经过去32年了。因此，我在阿姆斯特丹机场登上MALÉV（马列夫）飞机去匈牙利时，看到大量匈牙利人真令人震惊。我可见到的是原始的赤裸裸的挑衅性，这与传说中英国上层阶级的彬彬有礼正好相反。在候机室中他们互相大声尖叫，一些身材矮小的老妇人推推搡搡挤到队伍的前面去。这种混乱无序造成登机的后门塞满一大堆人。——在这儿，在这儿，——不，最好到窗户那儿去！——莫利在哪儿？——让我们在一块儿。——这儿有空地方！可怜的女乘务员一直试图使每个人安静下来，——请都坐下来，有的是地方，有的是空位让你挑，请都坐下来。——但是没人听。

他们的想法就是：任何东西都从来没有够的时候，世界上的坏家伙都要尽力压垮你，你要想得到什么东西就必须大喊大叫，猛推猛抓。我了解这种文化——我的前13年就是在这种匈牙利文化中长大的，我也有其中某种东西，所以每当我一见到这种文化，就能够认出它来。

我们飞机着陆之后，我们同布达佩斯的头一个接触之处就是那幽深的、冷冰冰的、灯光昏暗的海关棚屋，其中负责人似乎是三个高级军官，两男一女，都穿着擦得锃亮的高统靴，卡其布制服、斜挂右肩的武装带，低顶圆帽，肩章带星。他们是行李检查员，所有到达的旅客即将去到哪里去都依赖于他们的一闪念。一群乌合之众混杂排在一起，没有秩序，没有引导，也没有字母顺序。我后面一位的手提箱还没有到；他发现我用英语讲话，这事似乎使他感到放心。一位慌里慌张的荷兰人试图解释，他给一位医生带来的是十分精致的X射线仪器，但是，这个问题远远超出那些检查者的语言能力。过了一小时，我鼓起勇气问什么时候该轮到我了。“噢，你的还没有检查过？好了，让我们看看。”一分钟之后，他们就挥手让我通过了。我的东道主，以拉斯洛·富克斯（Laszlo Fuchs）和保尔·莱维斯（Paul Révész）为代表，全部时间都在那里等着。以前，我曾经在美国召开的学术会议上见到过他们，这次我十分高兴能再见到他们。那时他们都很年轻，显然是有天赋、有抱负的数学家。富克斯后来移居美国，定居在图兰尼（Tulane），写出关于阿贝尔群的著名专著。莱维斯成为匈牙利数学的领袖人物，是解析概率论的专家，也是一位不知疲倦的环球旅游者。

他们把我安置在格勒尔特(Gellert)旅馆——我从童年时代就记得这个伟大的名字以及它显赫的名声。我们一起吃晚餐。奇特的制度：侍者的领班来记取你订的菜单，另一个侍者给你上

菜，第三个侍者级别在上面两人之间，来收你付的款。当你吃好了准备离去时，你招呼他，告诉他你吃过什么，他就在一块纸片上乱写了些数字，然后告诉你付多少钱。这个价钱已经把服务费的份额包括在内，可是他还是希望你额外给小费。

在我的浴室中，我找到一小块肥皂——就像小汽车旅馆里给的那样大小，但是给了我一个星期的用量。脸盆的下水堵住了，总要等好半天，水才能泄掉。灯伞破烂不堪，床上没有床单只有一条被子，面积比我还小一些。我身体如果那一部分从被子下面露出来，在夜里很快就被冻得冰冷。

楼下大厅里有舞会，大多数舞曲我都知道。其中一个是“我的全部，为什么不全部占有我”，另一个是“是，先生，那是我的孩子”，第三个（真的！）“长时间摇摆”。头一个晚上，无论是舞会还是窗户下面的来来往往的电车都没能吵醒我。

慢慢地，慢慢地，记忆开始恢复，缕缕的烟雾迷漫的印象似乎还称不上记忆，但是当我在一度很熟悉的小镇角落散步并同亲戚们谈话时，它就变得更加实在了。它们不再是一缕缕的烟雾，而变成不相连接的小潭，不过仍然是形状不定的，像泥一样。假如我过去养育它们、培植它们，它们也许会成为实实在在的东西，——但大多数碎成了尘土。这里就是一位阿姨给我买热栗子吃的地方，假如我向左转，我就会到一座公园，我不是在我叔叔家碰到过一位会世界语的中国客人吗？我注视着我一度住过的大公寓楼，现在前门人口处的住户姓名的数目已经是以往的两倍，每套公寓已经分成几家住了。电梯已经不管用了，楼道湿漉漉的，墙皮也大块地剥落，老式浴缸被丢弃在院落中。大楼外面，主要林荫道黑暗而且荒芜。（富克斯说“一切同你记忆的不同，不是吗？现在一切都差得太多了？”——我真没有心情来回答他。）一切东西都破破烂烂，褴褛，污秽，穷

困。我的总的印象是令人感到十分不快，整个城市（整个国家?）似乎十分落后，肮脏，军国主义的集权，本质上是东欧式的。

我的表弟弗兰克是我最熟悉的亲戚，他告诉我事情如何。他是主管工程师（用德文讲，就是听起来很神气的 Herr General Direcktor），管大量的钱（年预算超过 1 亿美元）；他有一辆小车［小的奥佩尔（Opel）］还使用公司的轿车（苏联造，外表看来像中等价格的、用了 5 年的切维（Chevy），有专用司机驾驶，是个年轻农民小伙子，穿着一件运动衫）。他的生活水平比起比他年轻 20 岁的威斯康星大学助理教授来还要低一些。他买得起奥佩尔的唯一理由是他曾在开罗工作 6 年，挣的是英镑。但是，保养维修费是一项很重的负担，他肯定负担不起一个停车房。他和他的夫人以及两个上大学年龄的孩子一起住在 4 个房间的单元里，共有 4 个小房间，一间是客厅兼书房，一间是家长卧室，另外男孩和女孩各有一间卧室。他承认，他说他负担不起给他的鞋打前掌的确是夸大其辞，但是他坚持说，他买不起他所需要的冬天穿的大衣。他的太太是学校教师，一周上午上课，一周下午上课，每小时课 8 福林（按兑换率合不上 50 美分）。一位清洁女工来帮她干家务，一个月来五六个上午，每小时工钱是 10 福林。

学校的孩子们必须学习俄文，但是公认的态度是不喜欢这个规定并对此表示不满。逻辑学家卡尔马谈到，他被邀请到华沙做报告时，就出现了语言问题。许多波兰人既懂得俄文也懂得德文。但是卡尔马是老一代人，从来没学过俄文，而他能讲的德文在战后的波兰又变得极端不受欢迎。他这样解决他的问题，用德语做他的报告，开场白这么说：“我非常遗憾我不能讲波兰语，但是，我希望如果我用我们东德同志的语言做报告，能够得到你们的接受。”

大多数受过教育的匈牙利人能够阅读和讲英语，在战前我住在匈牙利的时期，以及后来我访问匈牙利的时候，在报摊和书店中很容易见到英文报纸和书籍。可在1964年，他们告诉我，你还能找到英文书籍报纸，但是我费了好大力气去搜寻却没能成功。我在阿姆斯特丹买的《纽约时报》我看了好几天，当我看完之后，就没好看的了。我到数学研究所去的头一天碰巧我把这张报放在公文包里。他们带我在所里参观，特别带我到一个宽敞、通风、很舒适的房间中，其中有一个桌子，上面摆着从世界各地来的报纸，可是唯一的一份英文报纸是伦敦《工人日报》。[1]啊，我想也没想就说，我可以对这个阅报室做点贡献，于是就把我的《纽约时报》放在桌子上。那天早上负责接待我的东道主立即局促不安起来。我很迟钝——我不知道我做错了什么，几分钟之后我才醒过味来。一开始，他开个玩笑，接着他明白地讲出来：他不想对我把《纽约时报》放在这里负责。我猜人们会认为那是一个低品位的玩笑——就像在埃尔克斯(Elks)俱乐部或者在浸礼会教友晚餐会上放一份《工人日报》一样。

使我心烦的是，大部分时间必须讲匈牙利语。我觉得这种语言不很优美，表达意义不确切。我在英语中学到的许多精致的区别（例如 therefore，hence，because，so，and consequently）在我想用匈牙利语表达时全都变成一个词。随着时间的过去，事情有所改进——有时我突然记起来一个我35年都没用过的词，但是常常想可能我会把它用错。当然，也有好多词我根本不知道，因为在我小时候，它们还不存在。在我去再确认飞机预定时碰到一个例子。当时负责确认的年轻女士刚

① 美国共产党机关报。——译者注

好不懂英语，但是，我拿我的票给她看，要她核实一下是否所有手续都已办妥，她把这事办得很顺利，很有效。事情办完后，我想我应该乘此机会学会用匈牙利语讲“再确认”。于是我问道：“请告诉我，我刚才办的事，你帮我办的关于预定的事，你们怎么说，你们用什么词？”她说“噢，那就是 rekonfirmalni”。

我去匈牙利的主要任务不是侨民回国访问，而是远道来的数学家来建立和巩固同匈牙利的科学上的关系。我做了很多工作。我见到和再见到几十位人物，其中有大人物像瑞尼（Renyi）、文其（Vincze）和阿列克塞兹（Alexits）等人；也有年轻的初学者，例如马友斯（Majusz），他曾跟着盖尔范德（Gelfand）在莫斯科学习；还有杜斯特（Durszt），他来自塞格特，是纳吉（Nagy）的学生。的确，有些工作十分艰难，最艰难的事是我不期而遇陷进的“多边会谈”。据我所知，那天下午我到数学研究所去用咖啡，同许多人握握手。我的东道主安排了别的事。的确他们给我半杯黑色液体，味道就像氢氰酸，可是一旦杯子握在手里，我们都被集中奔向一个大房间中，其中有 30 多把椅子像看台式教室那样摆放着，另有 3 张椅子面对着这些椅子摆放。他们让我坐在 3 张椅子中间那张，文其和阿列克塞兹分坐两边。其余的人坐满 30 多把椅子，他们的后面就是墙。

于是，盘问开始了。密歇根大学怎样进行博士的培养？我对应用数学的作用有什么想法？美国数学家挣多少工资？我们能得到苏联的书和期刊吗？我尽我可能来回答，80%用匈牙利语，但是当有的情形变得复杂，并且比通常要求更为精确时，我的英语就脱口而出。

当时，研究所的任务与大学的任务有什么不同始终让我困惑，我一直没有能完全弄明白。粗略地讲，研究所搞研究而大

学搞教学，两个机构在行政管理上和财务上（同时在地理上）分得很开。但是，他们告诉我这的确只不过是一个粗略的近似。两个机构也合作，但是不经常，也不是全心全意的。研究所的一些研究人员有时也在大学讲课，大学中的一些教授在研究所兼职，但是两个机构之间肯定有某种对立，不过它们之间的关系更经常是客客气气，不那么真心实意，热诚相待。

数学访问涉及的主要仪式总是做报告。我的报告安排在我在匈牙利的最后一整天进行。当天是受难节（复活节前星期五），但对铁幕之后的国家来讲它不是官方节日。我事先解释我不能用匈牙利语做报告。我对匈牙利语的掌握更适合于谈论电影、旅游、学校、食物、家庭以及闲聊天，当谈话主题是政治、学术机构以及哲学时，我的匈牙利语马马虎虎能听懂，偶尔也能插上一两句话；但是要谈到 $\sqrt{2}$，$\int_a^b f(y)\,dy$，控制收敛定理，一致有界性原理等等，我的匈牙利语就完全不行了。因为我从来没有学会专业名词，而且在我最需要的时候，我的字典和我的语法书什么也查不到。我说，不行，我是美国数学家，我用英语做报告。

只是为了好玩，我写了一段引言（表示我对邀请访问的感谢，并为我不能用我的母语讲课抱歉），我请瑞尼翻译成好的匈牙利文，并且我记住它。当我站起来报告时，我开始先讲这段，于是一切正常，除了一件事之外。正好在那天，从埃塞俄比亚来了一个数学代表团，约有 6 个成员访问布达佩斯，当然，作为一种礼貌，他们也被邀请出席波耶・雅诺什数学会的会议。他们的英语非常好，可是当他们听到我的开场白时，他们理所当然地吓坏了，他们不明白，我讲的是否是正确的英语。

讲演照样继续进行下去。当我讲到大约一半时，后门开了，有 4 位侍者托着咖啡盘子进来，他们开始分送咖啡，弄得茶托、

咖啡匙叮当响。他们把我的咖啡直接送上讲堂给我。我不得不大声讲，但是我真希望这种事情没有发生。

结局好就一切都好，我的访问终于结束了。当我知道波耶·雅诺什数学会给我500福林（约合20或30美元）的讲课酬金时，我感到有一点小小的惊喜。我对此无所期待。我第二天早晨在机场买的报纸封面上有“全世界无产者，联合起来”的标语。检查我护照的人看起来像位陆军准将，他认为我就是那掉把登机卡落在他桌子上的人，于是，把我叫住：“哈尔莫斯同志！”当我登上我的萨贝纳班机（下一站布鲁塞尔）时，我感到心情轻松多了。我重新跨越铁幕。我回到了家。

这是20年前的事了，许多事现在也不一样了。格莱特旅馆给的肥皂也多起来，街道也更亮堂，墙上也有更多的灰泥，也有更多的英文书和报纸（包括《纽约时报》）。只是海关稽查员和入境检查员还像以往一样高级别和有权势。

苏格兰 1965

不列颠数学讨论会（简写为BMC），于1965年4月初在顿迪开会。由W·N·埃维里特（Everitt）教授［他在我碰到他不久之后，用诺里·埃维里特（Norrie Everitt）的名字］负责，邀请3位“综述”报告人，即克劳德·舍瓦莱（Claude Chevalley）、阿瑟·爱尔台里（Arthur Erdelyi）和我。在会议的3天中，每天有一个综述报告。我是在1964年5月收到他的邀请信的，正好我从匈牙利回来后6周，那时我已经休息好了，急于要重新回到数学界名流乘喷气式飞机环游世界的队伍中去。于是我回信说，好的，十分感谢。从此开始历经11个月的复杂谈判。

关于BMC，其实并没有什么特别复杂的地方。他们有一些资金，虽然不太多，但是也已足够支付国内交通和生活补助费用。跨大西洋飞行的机票费来自国家科学基金会，当然，这得办理填写申请书、复印、摘要以及其他诸如此类的烦琐手续，但是我精力太充沛了，只是这点活动根本还不能让我满足。我自己想：一旦我到欧洲去，我也能同样把它搞好。杜布（当时是美国数学会主席）和艾伯特（Albert，他是已选出的下届主席）告诉我美国科学院和苏联科学院之间最近已订立学者交换协议。主要是，在1964—1965年度某个时期，每个国家都派20位著名的科学家到对方的国家去，“至少有一半应是各自科学院的院士，每位时间不超过一个月，主要是讲学、指导讨论班，对各种科学问题进行科学研究。”我当时48岁，我已得到相当的声誉因此也很“著名”，于是我申请成为20人当中的一位。我自己想，一旦我去了苏格兰和苏联，我或许还可能再去匈牙利一趟。于是，我开始同朋友们通信，同匈牙利科学院进行官方联系，看看是否能够办成。

在科学院或者接近科学院这个层次上进行通信联系往往十分复杂，于是我同时和4个国家进行联系，这就变得极为复杂。除此之外，还有些事情也增加了复杂性。在国内，我得同国家科学基金会和美国国家科学院打交道；在苏格兰，不只是BMC，紧接着还有一个爱丁堡数学会和伦敦数学会召开的联席会议；在苏联，我计划要去莫斯科和列宁格勒，正事之外，我还得同他们谈判，他们把我的书译成俄文应付我版税；在匈牙利，安排我在布达佩斯和塞格德两地讲学。这11个月刚刚够我安排这两个月的行程。其中有的很顺利，也有因官僚主义产生的挫折和失败，但是最后所有事情都办妥了：所有的文件、照片、签字、印章（还不提美元、英镑、卢布、福林以及飞机、汽车和

火车)。准备好一个长的春季旅游和数学活动后，我出发了。

这次行程的不列颠部分共有3周，但是只有第一周在苏格兰是数学活动，另外两周我的太太同我会合，一起在英格兰度假。为了避开西塞罗机场的噪声喧嚣，我直接飞向普莱斯蒂克的机场，那里机场小、文明但是很有效。我在那里过夜，试图找回因把我误放在大西洋中部某地而耽误的5个小时。早晨，我就轻松地开着租来的福特厂出的西风(Zephyr)车直奔顿迪。这并不难，你只需按照到格拉斯哥的路标行驶，然后在弯曲狭窄的街道上毫无办法地转来转去，不管怎样走最后到了城市的另一端；然后跟着到斯特灵的路标，到了市镇当中；最后，跟着顿迪的路标，问交通监督员安格斯旅馆在哪里，沿途一路，你可以听着第三套节目播出的莫扎特，然后又换成用盖尔语①的新闻广播。

埃维里特和他的一位同事R·P·皮尔斯(Pearce)到旅馆欢迎我。我们一起在安格斯旅馆用晚餐。埃维里特把饭费算在我的房费之上，于是他急忙向我保证。他说“不要怕，我们已经安排把账单送到讨论会上去。我们真正照我们说的那么做。”

参加讨论会的人很多，整整3天的会超过200人参加。我和其中一半以上的人握过手，并试着记住他们的名字。但是现在，差不多时隔20年，我只记得正式名单中的20到25位，能把名字对上面孔。

会上我第一次见到弗兰克·邦塞尔(Frank Bonsall)，当时他还在纽卡斯尔，后来他移居爱丁堡，在那里我同他搞得很熟。他是位十足的英格兰人(与苏格兰人恰成对比)，但并不因此挑起争端。他学习苏格兰的一切事情及其行为方式。当我在布达

① 盖尔语为苏格兰高地凯尔特人用语。——译者注

佩斯和印第安纳州克劳福德维尔见到他时，他表明他自己同样能适应当地的情形。我不由得想引用他的一句话。他说“哈尔莫斯教授可能看来像一位数学家，但是实际上，他是一个等价类，他研究许多领域，包括代数逻辑和遍历理论；今天下午，他的希尔伯特空间的代表将给我们做报告。”

爱德华·科林伍德爵士也在那里，以前我就听到过许多关于他的事。于是我大胆自我介绍并问，我是不是可以请他喝一杯。他答应了。



E·科林伍德，1965年

他头发不多，全都白了，身材比平均身高略矮，具有优美的风度。他注意听别人对他讲的话。他是位复函数理论专家，有很好的名声。他很有钱用不着在大学就职谋生。由于他对英国医院系统的贡献，他被授予爵士爵位。

兰金（Rankin）也参加会议。罗伯特·亚力山大·兰金

(Robert Alexander Rankin),盖尔语的名字就是麦克兰克(Mac Fhraing),发音有点像Mackt Rhankh!他是位著名的解析数论专家，他曾用盖尔语写了一篇论文只是为了好玩。《数学评论》的主编，博亚斯(Boas)，不知道其中的奥妙，而且他也没有多少评论员懂盖尔语,于是就把这篇论文寄给兰金让他来评论。兰金立刻写了这个评论，但是他的良心不允许他把他的真实身份对博亚斯保密。不管怎么说，这篇评论还是发表了。

约翰·爱多斯(John Erdos)也参加会议。他是位年轻的泛函分析专家，他不可避免地，但是只是暂时地被称为“假爱多什(Erdos)”。他生于匈牙利，但8岁就离开家乡，在澳大利亚和英国长大成人和受教育。他讲的匈牙利语和英语都比我强,他坚持要别人用英语式发音叫他的名字，也就是不想读成Air-daish而是发成Erdoss。由于爱多什如此出名，如此无处不在，肯定爱多斯的语言改革进行得不顺利。[是否所有读者都知道，我反对有些人认为我的姓的正确发音应是“Hal-mush”(哈尔木什)。请你务必说“Hal-moss”。]

数学珍奇和有关数学的趣闻逸事总是传来传去。有个数学逸事是关于切尔维尔勋爵(Lord Cherwell)[他原名叫弗雷德里克·亚力山大·林德曼(Frederick Alexander Lindemann)]和他的讲演风格的。传说，他的讲课大部分时间听不清，听清的都是不可理解的听不懂的话，而少数情况下，他讲的话既听得清又听得懂，那就是错话。顺便说一句，就是这个人，李特伍德讲了他一个弗洛伊德式的故事。李特伍德不喜欢这个人，他的情绪是如此激烈，以致于他记不住他的名字，也就是他被封为勋爵之前的名字。林德曼和李特伍德在剑桥大学是同事。李特伍德在系里会议上发言,反对……教授提出的糟糕的建议时，唔唔半天讲不出他的名字实在感到困窘。于是李特伍德想用记

忆术的方法来解决这个问题，每一次他要想记起他同事的名字时，他就去想到π。而林德曼是证明π是超越数的，这样就会想起林德曼。正如李特伍德后来讲的，从某种情况下讲，这招挺灵。而后来，李特伍德讲课讲到π和π是超越数时，他想讲出这个证明应该归功于谁时，他就只能讲出首先证明这个深刻的结果的是……唔唔……。

温迪·罗伯森从格拉斯哥驱车来参加部分讨论会，他带着4.8个孩子（4个循规蹈矩，.8那个最引人注目）。她和她的丈夫阿列克斯［Alex，常常错误发音成Alec（阿列克）］都是数学家，而且合作搞拓扑向量空间。与会者中有位思想奔放的，控制不住的人，他就是红头发的爱尔兰人特里沃·维斯特（Trevor West），他常常说，"设haitch（H）为一个希尔伯特空间"。他几乎是一位彻头彻尾的主张绝对禁酒的人，可讲话却像一个醉鬼。他还是位热情专注的英式橄榄球球员和裁判员。后来他成为一位参议员，在爱尔兰议会中代表都柏林的三一学院。

在讨论会期间，我没有把每一分钟都花在讨论会上面。我花许多时间在顿迪散步，有时到商店采购。最好的散步之处是在顿迪丘上，这是一个大约高500英尺的小山，从那里可以俯看全市大部分地方。另一起愉快的散步和购物的远足是同舍瓦莱在一起的。在一两次报告中，他和我的坐位正好紧挨着，在会议中间休息喝咖啡时，我们两人没费什么劲就一致认为，听两个报告就足够了。于是我们就逃掉上午的第三个报告，溜出去给舍瓦莱夫人和舍瓦莱小姐买套头衫去。舍瓦莱和我在普林斯顿时已经相互认识，常常一起下围棋，他一度下围棋十分上瘾。由于我们远离家乡，一起被投向顿迪，我们觉得这样我们很容易友好相处。当天晚些时候，舍瓦莱做他的报告（关于代数群）。我坐在前排，试图显得能够听懂。他的报告很受欢迎。

当时我很奇怪，对报告表示称赞，人们不只是鼓掌而且同时还猛烈跺脚。我不知道这是英国习惯，还是欧洲学术界的普遍习惯。

爱尔台里的报告安排在第二天。他原来也是匈牙利人，但是他接受的大部分大学教育以及全部的职业生涯都是在远离匈牙利的地方：在捷克斯洛伐克，在苏格兰，在美国。他离开爱丁堡到帕萨纳，在加州理工学院干了15年。他在那里干的最大的一项任务是“贝特曼（Bateman）计划，这也是他被邀请去加州的原本理由。这项计划就是组织，事实上是重新整理和重新写作，然后出版哈里·贝特曼（Harry Bateman）的遗稿。在齐心协力的努力下其结果是五大卷著作。爱尔台里的主要兴趣是硬分析，包括称为“特殊函数”这个学科。最后，他又回到他热爱的爱丁堡，当我在顿迪见到他时，他就定居在那里。他的报告堪称讲解艺术的珍品——经过仔细琢磨，清晰、内容丰富、十分有趣，整体上十分优美，而且相当容易懂。他还谈到非标准分析，也就是不是他通常研究的分析，而且表示赞许。他报告之后，舍瓦莱却表示轻蔑和讥讽：无聊的、极坏的报告，废话。这人如此大胆，居然说这些材料能得出广义函数能够推出的结果！

那天晚上，我们中一些人被邀请参加院长的招待会，我或许可以说是被命令参加的。院长在美国称为学院的校长。招待会从7：45到8：30。客人们主要是会议组织者和报告者，以及一些精心挑选的从国外来的某些重要人物。我们全都穿上最好的衣服，集中在一起，7：45准时由埃维里特引导走进院长的房间，然后被介绍，被敬给雪利酒，还提示我们在来宾薄上签名。我们从来没听到过院长的名字，我同他聊了几分钟，才知道他的专业是英格兰法。到8：30我们准时同院长握手并且离去。

我的报告在会议程序上安排在最后。埃维里特后来承认是他安排的，他称之为“有点故意恶作剧”。我有点担心那块奇特的橡皮黑板，它用橡皮带圈住黑板框，可以周而复始地转。20分钟之后，当你把已经写满字的那部分黑板推上去时，你要开始写的那部分就从底下上来。我的题目是“希尔伯特空间一些最新发展”（还能有别的吗？）似乎一切进展顺利。鼓掌是彬彬有礼的，于是第 17 届 BMC 宣告结束。

在开学术会议时，我总是神经紧张，一直到我报告完之后我才感到，我可以松一口气。第二天召开的爱丁堡数学会和伦敦数学会的联席会议在附近的爱丁堡举行。这是一个短会，我记得只有一个报告，由兰金做的。开完会后，我开始度假，而度假之后，我就得为苏联之行而费心了。

我的假期中间也夹杂着一点业务活动，因为我们要拜访朋友们，而他们大部分是数学家。这是一次好假期——我们到赫尔、伦敦、南安普顿，以及其间的一些中间站。赫尔的经历是最新鲜的，大学正在发展，在建设，同时也在受罪。在泥沼中也有仙鹤出没，比尔·考克洛夫特（Bill Cockcroft），当时科学学院院长，他的书桌放在一间黑暗小屋里暴露出的水管旁边。

他带我去见图书馆长，菲利普·拉尔金（Philip Larkin），是位著名的诗人。事先我感到烦恼，我对诗一窍不通，我很少读诗，也不能欣赏——但是我听到过著名的菲利普·拉尔金，我到他那里同他谈什么呢？我不需要担心。拉尔金是位诗人，一位稳重的有教养的绅士。他带着深深的职业兴趣告诉我，去年他的图书馆花了多少钱在数学上，包括订期刊一共是 1606 镑 3 先令 6 便士。用午餐时，我们谈到双光眼镜（我们两人都是刚戴），还谈到版权法。我想我们两人对谈话都很满意。

假期结束了，新任务在召唤。星期五晚上（4 月 23 日）我

送我太太在南安普顿上船。星期六上午我驱车到伦敦归还我租来的小轿车，办了另外几件诸如此类的小事。星期天，我休息，觉得心烦意乱，试图进一步多学些俄语。星期一一大早我就去伦敦西航空站点检票准备登机，把我身家性命交给苏联民用航空总局（Aeroflot）手中。

莫斯科和列宁格勒的游客

我可不想因我口袋里带的小型照相机而让人把我当成间谍。因此，我把它拿出来向海关人员挥动，并用我最流利的俄语解释："fotograf apparat"（照相装置）。他咧嘴一笑，挥手让我过去，说"是的，米洛克斯牌的"。我在密歇根大学的同事，尼基·卡查林洛夫（Nicky Kazarinoff），这个学年在莫斯科度过，他同S·V·福明（S. V. Fomin）以及R·V·甘姆克雷里捷（R. V. Gamkrelidze）和E·F·米申科（E. F. Mishchenko）到机场接我。福明是盖尔范德（Gelfand）和柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov）的学生，而甘姆克雷里捷和米申科都是庞特里亚金（Pontrjagin）型的控制理论专家，他们访问安阿伯时，我已经认识他们。（当时我请他们到密歇根州马歇尔的温·舒勒餐馆吃饭，这里离安阿伯有42英里远。美国国务院曾发出严格的命令，甘和米必须呆在以安阿伯为中心，40英里为半径的范围之内，这是为了报复苏联人以前发出的类似的命令。咳，我们的系主任想要避免因放纵而带来任何可能的指责，我不得不请示华盛顿得到批准，让我们的客人见识见识真正美国的餐馆中凉拌菜自助柜是如何运作的。）

尼基已经把他那部火红色的宽敞的客货两用轿车带进苏联，我们就乘这辆车到市中心。在莫斯科拥有一辆轿车并不总



R·V·甘姆克雷里捷 1962年

是好玩的事。尼基说，他的车到莫斯科头一个晚上车上的天线就被人折断并被拆走。我们还看见一辆停在一家餐馆门口的车两个前胎都被放了气。陪同我的当地人提出两种可能的解释：一种是这只是恶作剧好玩，另一种是对于那种大轿车显示出来摆阔气的派头表示愤恨。大约一星期多之后，又有一次，他们驱车带我到离城几英里的博物馆参观时，我的东道主把汽车发动机罩下面三个关键部件拆下来包好之后，才敢进入博物馆参观。

布达佩斯饭店与肯辛顿宫饭店完全不一样，我在那里度过最后两个晚上。在伦敦，总有门卫过来打开出租车车门，帮你把行李拿进去，有位穿着小礼服的年轻助理把你带到房间。床铺很豪华，浴室中的毛巾架上总有许多条毛绒绒的毛巾。而在莫斯科，门卫总留着两天没刮的胡子，半截香烟叼在嘴里，对



E·F·米申科 1962年

我们连看也不看，正全神贯注地同邮差聊天。饭店出纳员打着算盘(优雅而熟练)，算盘在整个苏联十分常见。苏联的电梯名声可不好，人家常跟我说，你必须等10分钟才能来。房间很小，寒冷而阴暗(只有一个40瓦灯泡挂在天花板上，另外一个是落地灯)。床只是一个帆布行军床，从狭窄的窗户往外看就是后院，收音机永远只能调到一个台——我能挑选的不是没有声音就是用俄语广播的新闻，偶尔也插播像“巴黎桥下”之类的伤感民歌小调。而到五一节，节目完全不一样：在有军乐队的背景之下，用情绪激动的声音做讲演，其中20个词中我只能听懂一个词，像美帝国主义、越南、和平、侵略者、团结、光荣、苏联

共产党等等。我没有理由相信我这个房间装上了窃听器，我可能还没有那么重要足以获此殊荣。但是，我产生这种想法是因为想到这个收音机不知是怎么运作的。收音机上没有开关装置，我让它无声的方法是把音量控制一直推到左端。但收音机还是开着的，当我用耳朵贴近它，我还能听到哼鸣声，并感到它很暖和。

布达佩斯饭店像布达佩斯的唯一一件事是菜单上印着的四种语言当中有匈牙利语（另外三种是俄语、德语和英语）。我的早餐价钱是1.22卢布（这比1.22美元稍多一些，为近似计算方便，卢布和美元可看成等价。）我给她10卢布现钞，这使得女服务员一阵慌乱，不行，不行，我从来也没找过这么多钱！我无可奈何地耸耸肩膀，于是她接受了这钱，披上适合上街穿的衣服，乘公共汽车到银行，填上换10卢布的申请表。我给她20戈比的小费（=0.20卢布）。但是，她不同意，不，不，那太多了，不用那么多！在另一家饭店，我还碰到过同样好客的（母亲般的?）态度。同我一起吃饭的朋友把我点的饮料解释给女服务员听。她同意给我一杯牛奶，但是始终没有送来。所有其他的饭菜都上好了，她就向我的朋友解释道，在吃鲱鱼之后喝牛奶对我身体没好处。

服务人员（像服务员、店员和出租车司机）中，很少有人除了俄语之外能够讲任何其他语言的。布达佩斯饭店中有位女服务员能讲英语，但她公开表示，她宁愿接受我用俄语叫菜的定单。头一次我碰到她时，我必定是到餐厅太早了，她就走到我的桌前，指着我，想必是让我确切知道她正在向我讲话，她说，“You most vet ten minoot pliss”（请你要再等10分钟）。

我在布达佩斯饭店的餐厅中等待的时间大大超过10分钟。上菜也总是上得很慢。我几次记下时间，发现我通常一天得在

餐厅里呆上3个半钟头，大部分时间只是坐在那里等着。餐厅服务不是偶尔很差，而是一贯的全面的差。万一你忘了叫黄油，后来才对服务员顺便提起这件事，他不会马上去取来一些给你——这项操作可是个重大行动。点菜必须正式写下来，服务员必须排在为你取主食的长队中。你怎么付账也造成同样的麻烦。餐厅没有中央出纳台，每个服务员分别算账，一旦他找不出钱来，麻烦可就大了。

从客人的人数来看，男服务员和女服务员的人数似乎足够多，但是可能他们的心都没放在工作上。一位可怜的黑人客人（后来我知道是来自尼日利亚）就碰到好多麻烦。之前，我和他只是彼此点头微笑，但还没有说过话，有一天午餐时，他跑过来问我一些事情。一开始他用法文问我，我好一会才搞清楚；于是他接着用有点结结巴巴的，但完全正规的、严格教育出来的英语来讲，是否能请我向服务员解释，他总是希望在吃饭时喝水？这主要还不是现在立时要解决的事，而是在午餐和晚餐时也都要。他认识到，可能准备（这是他用的词）是件麻烦事，但是请我事先向他们解释是否就更容易一些呢？他说，他要的只是白水、天然水，不是矿泉水。可怜的人，我尽力帮他，我用我的极差的俄语，果然，有人给他送来一杯水。可是，那天晚上他用晚餐，可就没人给他送水了。

对于不了解情况的外国人来说，莫斯科的生活不总是愉快的，这还有其他方面因素。举一个例子来讲，根本没有地图提供。国务院给我一张美国绘制的莫斯科地图，其上的名称完全用英语字母拼写，但它也不太有用处。这张图已经过时，很不精确，而且许多街道名称已经更改，布达佩斯酒店所在的那条街在图上也没有标出来。尽管如此，它还是比没有强，当我在城里漫游时，还是很用得上它。

我听说，严格的国家控制也有好的方面，其中之一是甚至小的法规都能强制执行。例如，听说在莫斯科没有乱扔的废弃物。这可不是真的。它可也有不少。当然，它不像芝加哥市中心那么脏乱，但是，它有。我就看到一位出租车司机把报纸揉皱用来擦拭汽车前挡风玻璃，当车开起来之后，顺手把纸扔到窗外。

莫斯科河贯穿莫斯科，河岸边以及来回穿过它的桥给我提供许多散步的好去处。城市本身，就像我可看到的，似乎有些肮脏不整。从远处，一组大楼在太阳光辉照耀下（当地晴天少见）显得耀眼引人注目，但当我走近去看，就会见到窗户上斑斑点点，污垢积结，涂料剥离，人行道裂着缝。城中总有一种永远存在的，令人不快的，特别的发霉气味。有位莫斯科人说，这是由于使用低质量、低辛烷值的汽油引起的。我在苏联停留期间，我只看到很少几条狗，猫连一只也没见到过。

人们宣传列宁格勒比莫科斯漂亮得多，甚至那些贬低苏联旅游的人都不得不承认列宁格勒有其独到之处。列宁格勒建在涅瓦河上。涅瓦河加上一些运河把城市分成许多“岛屿”。我到涅夫斯基大道（Prospekt），这是一条宽阔的林荫道，道旁有许多漂亮的骑着马的将军的石像，我觉得这里的确十分令人满意。

苏联人民连一些小的自由都没有，而这些自由在许多其他国家被认为理所当然，不在话下的。我记得的最明显的一个例子是，旅馆饭店只有一个门通往外面世界。布达佩斯饭店和我在莫斯科见到的其他几个饭店都是如此，列宁格勒漂亮的阿斯托里亚饭店也是如此。阿斯托里亚面临三条大道，要是你不在开着的大门的那条街上，你就得拐一个或两个弯才能进到饭店里面。一个不太明显的例子是，你很难（不可能？）找到英文的书刊和报纸。可能最不明显的例子是国内护照的使用。苏联的

国内护照不像完整的国际护照，但是比单纯一个身份证要精美，内容也更为详尽。其中具有照片和许多印签，苏联本国人在允许在苏联旅馆中登记之前必须首先出示他的护照。

无论在莫斯科还是在列宁格勒，我都参观了一些旅游景点，它们多少中和了一点我刚刚提到的那些不愉快的印象。例如，我在莫斯科参观过GUM，看过马戏，到过克里姆林宫剧院。

GUM 是一家巨大的百货商店，或者更正确地讲是一座购物中心。它是一座 6 层建筑，刚好在红场的边上。但是大多数商品主要在一二两层，当你在里边走时，头顶上是不透明的玻璃屋顶，你穿过成百个小店铺。每个小店铺是一间小屋，一个货摊，一个小间，向广阔的通道敞开着。每家小店都专门经常一类特殊商品，如女帽或者肥皂或者文具。人们拥挤着一个接一个手里拿着购物袋，可以看到鱼尾突出地露在包外边。有线广播系统中，总有一个女人的声音不停地在那里哇啦哇啦地叫。

至于马戏团，就跟任何地方的马戏团一样，但是我特别喜欢莫斯科的，它是高质量的马戏团，表演十分出色。它只有一个圆形表演场，这我十分赞赏，而且手技杂耍、杂技表演和小丑都不错。滑稽说笑演员（讲俄语）看来也很逗乐，但有些动物表演，例如狗熊拳击和骑摩托车，我看了不太舒服。但是，不管怎么说，我十分感谢西纳伊（Sinai，后面我还要讲到他）带我到那里去。

克里姆林宫剧场在克里姆林大墙之内。它同其余部分的旧巴洛克式风格显得极其不和谐。它十分摩登、宏伟，全都是玻璃，间接采光，宽阔的走廊，大理石圆柱，以及无穷多次反射的镜面。演出厅很大，看起来漂亮，布置得很得体。每个座位上都有它自身的小扩音器，一副耳机插头（在国际会议时可用来听同声传译）。我去剧院的那个晚上没有用这些装置。当晚的

演出是威尔第(Verdi)的歌剧《唐·卡洛斯》。按照当地的习惯，我的东道主，甘姆克雷里捷和米申科，首先带我去快餐部。这是一间非常大的房间，有几十个柜台可以买吃的，还有几十张大桌子(没有椅子)，你可以站在那里吃你买的东西。我们吃完了以后，在演出节目开始10分钟之前，米申科说，现在我们可以回家了——这是聚会的最好部分。他在开玩笑，但他希望他不是开玩笑。听歌剧是一种牺牲，他不得不用这种方式招待我。第二幕之后，他告诉我，仿佛他及时地施给我恩惠一样，说我们可以不必非得再呆下去。我可非常欣赏这个演出，它的音乐、演唱、布景、服装，以及舞台表演都十分精采。但是，第二幕以后我们还是回家了。

在列宁格勒，我曾去埃尔米塔热(Hermitage)博物馆——著名的艺术画廊参观，它给我留下深刻的印象。它曾是沙皇的冬宫，巨大无比。它有宽阔的大理石台阶，非常漂亮的、错综复杂的镶嵌木纹地板，十分壮观的绿孔雀石大桌，以及确确实实的几百个房间。墙壁足有两英尺厚，天花板也有合乎比例的高度，房间与房间之间的门也大得能让大象出入。住在那里怎么样?

我试图用很短的时间看很多东西，简直有太多的东西值得看。我看到伦伯朗(Rembrandt)，鲁本斯(Rubens)，达·芬奇(da Vinci)的两小幅圣母像，提香(Titian)、高更(Gaugin)[①]、马蒂斯(Matisse)、毕加索(Picasso)蓝色时期画的人像以及许许多多其他画家的画。(另外还有点有趣的事情是把这些画家的名字由俄语字母的拼写解读出他们的原文姓名。)对于这么多的好收藏，展示却是不可想像的差。房间很暗，大多数时间电灯

① 原文误作Gaugin。——译者注

不开，而即使电灯开着，光线还是太暗，依然看不清。有的地方有充足光线从窗子直接射进来，但是，我们可能看的只是玻璃的闪光和反射光。

在参观中，只有我们少数人被领进黄金珍宝馆。一位训练有素的导游用非常流利的英语向我们讲解，主要是给我讲，其中充满了半专业的词汇，例如，冠冕、垂饰、风格化雄鹿(Stylized Stag)、鞘、鼻烟盒等等。她按照历史顺序讲解，我们看到从公元前700年到公元后700年，希腊人和蛮族所做的珠宝，接着是从17世纪到19世纪造的近代的制品。令人惊奇的是看到2500年以前制造的实心金雄鹿(大小同桌上电话一样)，还有实心金盔（实物大小的）和月桂花环。我觉得更有意思的是看到钻石外壳的鼻烟盒，还有表、缩微肖像，同时也为它们制作的时间，它们所表现的奢华以及它们所代表的生活方式而惊讶。导游给我们展示的最后一件展品是“丹麦的最高勋章——白象”，我想她不明白我为什么咧嘴笑①。

凯塞琳女皇的夏宫在列宁格勒附近的普希金，它比较起来不那么惊人，但也有其豪华奢侈的方面。所有房间，从有宝座的大房间到值勤军官护卫的极小房间都华丽而俗气：黄金、雕像、浅浮雕、木雕，几乎都有东方式的夸张。一长串房间延伸300米(相当于芝加哥市一个半街区)，使得所有门都在一条直线上。当所有门都打开时，就呈现一种闪闪发光的金色和白色，看来无穷无尽的美丽景观。

圣·艾萨克大教堂刚好跨越从列宁格勒的阿斯托里亚饭店出发的那条街上，它是城市中最高的建筑。从外面看，它就像一座教堂没有什么特别之处。可大教堂里面全是大理石和孔雀

① 白象在英语中有中看不中用的意思。　　译者注

石——呈现粉红色、金色和绿色。它现在成为一座博物馆，但是除了极少例外，这座博物馆所能展示的就是大教堂本身。这些极少例外包括：一对建筑师的雕像，一些大教堂本身的模型，一张售货桌子，你可以在这里买纪念品和明信片，还有就是从穹顶最高处到教堂内最底部悬挂的一个佛科摆。剩下的就是圣·艾萨克大教堂本身了。

门口有告示牌，要求人们讲话轻声细语并且脱掉帽子。近代俄罗斯生活中还没有听说过关于帽子的礼仪。大多数人从来没听说过：这样一种脱帽的举动是用来做为尊重对方的礼貌表示。甘姆克雷里捷，他博览群书，而且到西方旅游过，不得不向他的夫人解释，男人见到女士要脱帽。

你在大教堂内见到的，除了大理石和孔雀石的圆柱外，就是绘画，大多数是闪闪发光的镶嵌画。画中有圣徒、有在各种情景下的基督画像，还有近来的大主教，他们画在门上，画在墙和屋顶上。作画时，画师必定充满了全心全意的献身精神，同时具有艺术的想像。有的人真正仔细地观察画中的细部。圣·艾萨克大教堂是我在苏联所见到的最美丽的事物。

同阿诺索夫在一起

迪米特利·阿诺索夫（Dmitrii Anosov）被指定为我在俄国访问期间的东道主、导游、翻译兼同伴。从那时起，他因为在遍历理论方面的工作而颇为著名，但是在我认识的时候（我猜，那时他还不到30岁），他还正处在他事业的初期。我想，他还是挺喜欢负责接待我的工作的。当时他已经获得相当于哲学博士的俄国学位，他是位非常聪明的年轻人。他的英语相当不错，他的个性和我的个性比较投合以致我们相处没有什么麻烦。我

们多次一起用餐，多次一起出席报告会（常常是去做报告，我讲，他翻译），我们常常一起散步、谈话、旅游，我带的一双鞋坏了，他帮助我上商店买双新的（穿这双鞋只是为了临时救急，这个经历实在令人不快。我一到家，立刻把这双鞋送给了救世军。）

有三次阿诺索夫在场最使我感激不尽，——一次是在我访问苏联刚刚开始时，我同维诺格拉朵夫（Vinogradov）的正式会见，一次是我访问快结束时到列宁格勒的旅游，还有就是在这两次之间出版社举办的仪式。

伊凡·马特维耶维奇·维诺格拉朵夫（Ivan Matveevich Vinogradov）是位了不起的解析数论专家，我见到他时，他已经七十四五了。他身材矮小、肥胖、头顶全秃，虽不太老，但显得老气。从1932年起，他就是斯捷克洛夫（Steklov）研究所所长，从而在数学政治方面很有权势，就像他一度在数学上很有权势一样。事先计划会见从2：00开始，2：45结束。实际上，到3：15我才被引见，而且也没有给我讲些什么话的机会。维诺格拉朵夫夸夸其谈，什么研究所是怎样建成的，年轻人是骨干力量，国际合作十分重要等等，而且总是翻来覆去、漫无边际地聊。他讲的俄语含糊不清，可怜的阿诺索夫试图不时地给我翻译，可是维诺格拉朵夫就会喝住他，当时针转到4：45时，我就不能继续忍住我的不安心情，因为我5点有个约会，于是我讲了几句场面上必须讲的客套话，告辞出来。外交上的令人烦心的事：是否应由我，一位来访者，结束谈话，如果真是那样，难道我不该早就结束这次谈话？

到列宁格勒旅游最麻烦的事情是乘坐火车（著名的红箭）。我习惯于乘火车。过去，我常乘火车从芝加哥到东海岸或西海岸。我晓得怎么样坐在车子里睡觉，也知道在上铺怎样把身体



D·V·阿诺索夫，1965 年

弯曲使面积最小。在苏联，基本问题还是一样，但是遇到困难时，具体做法十分不同，特别是在语言不通，问题没法解决时(阿诺索夫在另一节车厢中，离开我有两节车厢)。在我的包间中共有 4 个人：一位老年人，一对年轻夫妇，还有我。包间共有 4 个铺位，两上两下，上床睡觉可是一个复杂的程序：我们

打开门，关上灯，改变位置，而且一般来说在几乎不可能的条件之下尽量做得彬彬有礼。我在哪里放我的行李包？（在下铺的下面。）上铺的背单在哪里？（在枕头下面折叠着。）怎么开盥洗室的水龙头？（把隐藏在里面的柱体往上推。）

火车正点到达，分秒不差。罗赫林等在车站接我们。他的德语讲得不好，英语则更差，他根本就不打算讲英语。结果不完全令人满意，我们大部分时间讲德语，除了偶尔我认为十分重要我必须讲清楚的地方，也顺口讲出英语，他的听

正式场合的客套话，诸如天气以及美国和苏联的图书出版工作有哪些相似，哪些不同之处。10分钟后（在用电话召唤之下）来了一位职员，把一张收据放在我的面前要我签字。由于这是正式文件，不允许我用圆珠笔签。我必须不仅写上我的姓名，还要写上我收到的款额，不能用数码写，要用文字写——还好，还准许我用英文写。我顺从地写上玖佰伍拾肆卢布陆拾肆戈比——当时大约合1000美元。于是他们给我一大叠钱还有几个硬币。并且，他们告诉我，要数一下，我数了，完全对。这件事就算办完了，但是仪式还没结束。每一桩像这样的大买卖必须喝酒庆祝。当天正好是工作日的上午，我们全都必须在剩下的时间干工作，拿来的饮料是矿泉水。于是我们喝下去，说些客套话，花了5分多种——大功告成。再见，握手，十分感谢。

现在我要面对的一个主要问题就是我如何处理我的卢布财富（要是所有生活中的问题都像这个就好了）。我不能合法地把它换成美元。我也不能把它带到苏联以外。我日常需要的花销——房间，伙食和交通——都由苏联科学院支付。只有非常多的鱼子酱和非常多的毛皮帽子对我还有用——可是我并不想多带很多行李旅行几千英里。卡查林诺夫和我经过一阵讨价还价后达成协议：我把我的全部卢布全都给他，他答应他一回到美国就寄给我一张支票（他的确照办了。）我们协议，兑换率是用2美元兑换3卢布。因为它对我是意外的纯收益，我也没什么可抱怨的了。

福明和盖尔范德

哪位数学家更棒，高斯还是欧拉？哪个州立大学的数学系更好，伊利诺伊州还是密歇根州？哪位数学家更长地享有盛名，

韦伊还是冯·诺伊曼？在各个水平上，诸如此类的问题数学家很喜欢问，而且他们也喜欢提供答案，而且为之争论和辩护。建立一个评定等级的系统是件十分有趣的事。建立以后可以用来衡量数学家（或者把他们削短，或者把他们拉长，使之适合），让我们每个人知道，我们在这个等级系统中的地位多高多低也是十分让人高兴（或者沮丧）的事。

很早以前我就知道下面这样一种可能的等级系统。头一等的数学家显然是一些不朽的人物，无可争辩的人物，像阿基米德和高斯这样数学家。第二等的数学家对他们当时的数学有巨大的影响，像费列克斯·克莱因和桑德斯·麦克莱恩这样的重要的大人物，但是，对于他们永恒持久的价值，还很难做出预言。第三等的数学家是持续不断地对于数学文献做出值得尊重的新贡献，也可能是一个“学派”的公认领袖，但是，他们的发现还达不到如此深刻，如此富有独创性，以致于他们的名字在他们去世 100 年之后还会有人记得。举例子是危险的，但是它能比形容词更能阐明思想，像乔治·麦基（George Mackey）、阿尔弗莱德·塔尔斯基（Alfred Tarski）和安东尼·齐格蒙德（Antoni Zygmund）等数学家的名字有助于表明我谈论的肯定是些绝不简单的人物。我倾向于把伽雷特·伯克霍夫（Garrett Birkhoff）和查克·里卡特（Chuck Rickart）列为第四等，其中还有狄奥多涅（Dieudonne）和库拉托夫斯基（Kuratowski），至于我自己，当然我不确定我属于哪一等，但是假如做一次投票选举的话，我愿意成为第四等的候选人。这些等级之间的距离可能给读者一个模糊的想法。精确的定义是不可能的。

这不是一个很好的游戏吗？也许是，不过很快它可能就变得混乱不清。我们把黎曼、庞加莱、希尔伯特应该放到哪里。显然可能他们应列入第一等，但是他们真的在某种意义下明显地

同阿基米德和高斯相提并论吗？至于保尔·科恩(Paul Cohen)，查理·费弗曼（Charlie Fefferman）和库尔特·哥德尔（Kurt Gödel）又该怎样？他们是否比希尔伯特差又比克莱因强呢？果真如此，我们是否该引进像 1.5 等这样的级别呢？

我想到所有这些都是当我准备写我在莫斯科交的一位朋友——福明。他刚好比我小一岁，是位温和的人，聪明的人，善良的人。作为数学家他可能得列人第五等。他是盖尔范德的好朋友和密切合作者，他也同柯尔莫哥洛夫合作。他给我的《测度论》的俄文译本写了序言，后来他本人又翻译了我的《遍历理论讲义》。我用一本字典，慢慢而费力地读他写的序言，使我感到我写了一本相当好的书，但也有相当严重的错误。这本书必定很不错，否则苏联为什么容许花费时间和精力来翻译它呢？而其中错误最突出的就是令人遗憾的美国倾向：对于书中所涉及苏联数学家的工作没有给予适当的赞誉，例如叶果洛夫定理和鲁金定理，书中并没有引用叶果洛夫和鲁金的论文，而是引用一本以前的专著（萨克斯的），其中可以找到俄国人著作的文献的细节（这可是大罪。）

福明的英语不太强但是还可以。我能常常见到他，一起度过快乐时光。（几年后，我能安排他到夏威夷访问我。他在那里过得更愉快。）他邀请我到他家里去参加一次晚餐会。那是很少有的。我只到过两三位俄国熟人家里去访问。而大多数情形下，我们是在公共场合会面，像教室和餐馆。

福明的家在二楼，整个楼从外面看像个杂物棚。这是 200 多年前盖的木头房屋。他们告诉过这房子是什么时候盖的，但是没人能记起它是什么时候最后粉刷的。墙似乎不是向这边就是向那边倾斜。福明所住的单元共有两个房间（外加厨房和浴室）：一间小房间既是会客室又是卧室和书房；而另一间更小的



S·V·福明和I·M·盖尔范德，1965年

房间则是就餐的地方。他的上大学年纪的女儿不在这里住。福明的夫人差不多同她丈夫一样高，但体重加倍，她非常好，性情活泼，脾气好，又聪明。她告诉我她从来没学过英语，但是她讲的英语十分地道，比她丈夫强得多。她做为生物学专家在一家出版社工作。她给我们做的晚餐，从罗宋汤到俄式薄煎饼，是我在苏联吃得最好的。

盖尔范德夫妇晚一个小时才到。这完全是意料之中的事，盖尔范德总是迟到。他半羞愧半骄傲地告诉我，虽然“唐·焦万尼”是他喜欢的歌剧，但是它的序曲他只能从唱片才能听到，因为他从来没能准时到达歌剧院。

在福明的晚餐会之前，我从来没有见过盖尔范德，但是我马上就喜欢上他了。他身材不高，充满活力，灵活机智，头脑

敏锐，还有点调皮捣蛋的味道。一开始我觉得他比我年纪大不少，像位犹太老爷爷，后来我才知道，他只比我大 3 岁，1965 年时才 52 岁。他挺为我刚得的感冒担心。他想借给我一件厚套衫，而且坚持要我五一节那周周末给他挂电话，如果我还不见好转的话。他带我去克里姆林宫做一次观光旅游，特别指给我看老沙皇的加农炮——一座看起来吓人的大炮，是在拿破仑战争期间为了反击侵略者而制造的。大炮造得并不好，设计方面肯定有些问题，它从来没有打过一发炮弹。但是它看起来很神气，我想把它拍下来，可是盖尔范德不让我拍。不要拍——我们这是在克里姆林宫——归根结底，这也算一件军事武器——不要拍。他去问保安人员，那位保安人员笑了："没问题，你要拍什么尽管拍好了。"

从某种意义上来讲，他在讲英语。他读过许多英语书。但是，在福明家那个漫长的下午，他总是不断地学习这种语言，一而再、再而三地学习。两点钟，他的英语讲得很慢而且结结巴巴，接着越讲越好，每分钟都有进步，到了 6 点钟，他就讲得很快，而且就像讲他那种不连贯的俄语时那么自信。他问我对什么感兴趣，然后就谈起数学。他对我的课题滔滔不绝地谈他的想法，解释它与其他学科的种种联系，他还告诉我在我的学科中哪一部分是重要的。

6 时正，我们坐在出租车中吃晚餐，驶向大学。著名的盖尔范德讨论班预定在 6：30 分开始，这是史无前例的！盖尔范德及时赶到。其实这不难办到：我们在路上转了半小时。我被介绍给十几个人，我们聊起天来。这就达到了所要达到的效果：讨论班像通常一样，在半小时之后开始。

事先安排我在那个晚上的讨论班上做报告，他们事前已经预先告诉过我。他们告诉我准备两小时的报告，但是延长成三

小时也不用大惊小怪，因为翻译要花时间，听众也会提问题，盖尔范德也会不断地插话发表意见。我没有准备的是最后一分钟的计划改变。在我们的车在路上转的半小时中，来了一位不期而遇的访问者，来自罗马尼亚的西普里安·福亚什（Ciprian Foias）。以前我知道福亚什，我们有过关于编辑事务的通信，我还读过他和纳吉（Nagy）合作的论文。我很高兴能够同他本人见面认识。他正好当时在莫斯科，碰巧也来出席盖尔范德讨论班。盖尔范德十分高兴地欢迎他，而且没经仔细考虑就临时邀请他做个报告，也就是在同一个晚上有两个报告都在同一时间做。

这把我惹恼了。我只有5分钟时间重新安排整个报告。我仔细安排的时间表不得不作废，不得不马上做出困难的决定（我必须保留什么？我还能够做些什么？）不管怎么说，还是得做出安排。但是，我真不愿意再干这事了。萨沙·基里洛夫（Sasha Kirillov），当时还是有着玫瑰色面颊的一张娃娃脸的28岁年轻人，他当我的翻译，给我很大的帮助，只用了几分钟我们就达成协议，我们如何配合默契。每讲完一两段，盖尔范德就会插话，像希腊剧中伴唱的合唱队一样，向其他听众解释其中的情节。我的神经已经被拉到极限，我90分钟的报告完了之后，我简直就垮了。

我结束报告之后，福亚什开始报告，情况简直是糟透了。福亚什的英语一点也不像现在他讲的，那时的英语说得再好也是支离破碎的。每当基里洛夫开始翻译时，福亚什就会插进来，让他停住，而在这时，盖尔范德就用他的结结巴巴的英语压掉福亚什的话，他多少同时用俄语向基里洛夫和其他听众讲当时正在讲什么。这简直是马戏表演，至少是三套不同节目的大型热闹的演出。



A·A·基里洛夫，1965年

莫斯科的数学家

我在莫斯科碰到的一些年轻数学家告诉我，每个人都觉得柯尔莫哥洛夫很难相处，而当我被引见给他时，我明白那是什么意思。他有些生硬、刻板，充分意识到自己的重要性。他对我彬彬有礼，无可挑剔，但是不能让我轻松愉快，使我感到很尴尬。我们头一次会面时，我们一致同意讲德语。但他的德语并不比我好。几天之后，我们又安排一次会见，柯尔莫哥洛夫到布达佩斯饭店来接我。我房间中电话铃响起的时间恰好是他说他要到的时间，然后他用德语讲“我是柯尔莫哥洛夫，我正在楼下”。于是我们出发了。

我希望我能明白我为什么不能同他相处得很轻松。当然，这

可能部分是由于他这么一个大人物把我镇住了。我明白，我们全都更喜欢能友好轻松相处的农民，哪怕他没什么教养，而不那么喜欢局促不安的、不自在的绅士——可是我还是不由自主地感到不自在。我觉得我不得不表演，也不知道要讲什么台词。我不得不照德语语法讲话（真滑稽可笑），我忘记以前柯尔莫哥洛夫研究过数理逻辑（很失策），于是我不得不从他那结结巴巴的德语中去理解他关于熵的新观点（差不多），而且不得不去同他的灵魂产生某种共鸣（没成）。

我们乘的是科学院的车（通常由政府发放的、像使用过5年的雪佛兰车），由一位司机驾驶，他穿着褴褛的外套，戴着顶软帽，嘴里叼着雪茄烟。开到目的地后，司机递过来便笺本，柯尔莫哥洛夫在一张便条上签了字。我们走进大学两侧的单元房子。柯尔莫哥洛夫的房子黑暗、阴冷但比较大。我见到5个房间，这些房间都不算小，但没有一个能比得上我在安阿伯的后面房间的卧室。所有房间都堆满了东西，一个角落堆了一叠叠抽印本，有的地方摆着收集的许多假面具，另一个地方有双滑雪板。我问："这是你工作的地方吗？"他说"我在近郊一间别墅里工作，一星期我只有3天在这里。"

参加聚会的还有福明，柯尔莫哥洛夫的夫人，以及帕维尔·谢尔盖耶维奇·亚历山大洛夫（他就是写著名的亚历山大洛夫-浩普夫[①]的那位拓扑学家）。他给我们看一位立陶宛艺术家的作品的彩色复制品，于是我不断地用德语讲，非常有趣、非常漂亮，我非常高兴。不久我们就坐下共进晚餐。晚餐十分丰盛，从鱼子酱到咖啡，都由一位女仆上。亚历山大洛夫是位老式的绅士，进餐中他回忆起二次大战前的德国状况使我们很开

① 亚历山大洛夫-浩普夫合著《拓扑学》于1935年出版，是拓扑学的经典著作。——译者注



A·N·柯尔莫哥洛夫，1965 年

心。他讲德语几乎就跟讲他的母语一样，而柯尔莫哥洛夫夫人和福明几乎一点德语也不会，但是亚力山大洛夫的魅力和个性一天都在洋溢着。它更显得是四海一家而不只是家庭聚会，对我来说真是十分值得记忆的情景。同时，对于柯尔莫哥洛夫和对我自己，我们都有意识地认识到参加聚会是一项义务，我们并不是不乐意参加聚会，但是聚会结束之后，我们都感到高兴。

纳依玛克，每人都叫他马克·安洛诺维奇（Mark Aronovich）大叔，是位著名的数学家，也是位极优秀的数学家。他不像柯尔莫哥洛夫那样伟大，但是所有人似乎都爱戴他，我



M·A·纳依玛克，1965年

也加入在这个行列之中。之前，他曾病得不轻（我听说是一次中风），他的右侧肢体瘫痪，经过很长时间，现在已几乎完全康复。康复过程先是在医院里住了5个月，然后在疗养院，然后在家，但他看起来仍很虚弱。为了对我热情友好的接待，给他带来不少麻烦，我觉得同他谈话仍是一种快乐。他设法给我弄来参加谢尔盖·米哈伊洛维奇·尼科尔斯基（Sevgei Mihailovich Nikolski）生日宴会的邀请，这样我们就有机会再坐在一起，聊几个小时。

这种生日宴会在俄国显然是十分常见的，可是对我来说却是完全新式的。正好三天前，尼科尔斯基整60大寿，他同时是贵宾又是东道主。生日宴会在大饭店（官方正式重新命名为莫斯科饭店，但是老人仍坚持使用老名称）举行，他邀请了大约100位来宾（传闻花费2000卢布）。当纳依玛克和我到达时，大

约一半人已经到场，随便站着聊天；餐桌已经摆好，摆满食物和饮料。从每个坐位都可以就近拿到两三瓶饮料，周而复始地顺序供应科涅克上等白兰地、柠檬汁、果酒、矿泉水、沃特加等等，而且以类似和同样丰盛的方式供应冷盘、鱼子酱、肉酱，口条、西红柿、鱼以及其他诸如此类的好吃的东西。我们就坐后，就开始吃喝。规则似乎就是同时吃、喝、聊，而且全部时间都用来吃、喝、聊，只有在两种场合下被打断。

一种打断的场合是祝酒。不管什么时候，酒转到某人处，他就要敲击酒杯，让大家注意，然后提议祝酒——称颂尼科尔斯基，尼科尔斯基的工作、尼科尔斯基的滑雪、尼科尔斯基的老师（柯尔莫哥洛夫）、尼科尔斯基的研究所——对此，每人都会碰杯，一饮而尽，高声喝采。有时，你只同你周围一两位近邻碰杯，但也有时，在一次激动演说后为某个充分理由而干杯。此时你就必须在8个人或10个人的圈子里同每个人逐一地碰杯。在这种真正热烈的祝酒结束之后，有一半与会者会站起来，围着首席那桌，疯狂地互相碰杯，还和尼科尔斯基碰杯。尼科尔斯基也时不时站起身来，走到这里或那里，同大家多次碰杯。

还有的打断不是由于祝酒而是由于食物。我想，晚餐应是事先做好的自助餐，但是并没有自助餐，只有冷盘。不久。服务员给我们每位上一道热蟹肝胃食品，然后是一大盘鸡和配菜，接着是几道小吃。

人们大吃大喝之际，也随便地到各处走走。有的人很早就离开会场，少数被迟到者进来补上他们的位置，许多人挨桌应酬，我也走一走同几位握手。有一位是安德烈·尼古拉耶维奇·吉洪诺夫（Andrei Nikolaevich lihonov，他的著名定理是紧空间的乘积是紧的），他是位圆圆胖胖的圣诞老人，圆胖的身体圆圆的头，白白的头发，白白的山羊胡须。另一位是尤里·瓦希

列维奇·普洛霍洛夫(Yuri Vasilevich Prohorov),一位杰出的、年轻的(35岁?)概率论专家,看来很像赭色头发的斯宾塞·特雷西(Spencer Tracy)。普洛霍洛夫对见到我似乎感到惊奇,就像我因见到他感到惊奇一样。他对我在莫斯科感到吃惊,因为没有人告诉过他我会来。他抱怨出现这种情况的无组织现象。列夫·塞门诺维奇(Lev Semenovich,即鼎鼎大名的庞特里亚金)在首席餐桌就位。我到他那里向他致意,当他访问安阿伯时,我们曾见过面。我打算再自我介绍一遍:“庞特里亚金教授,我是保罗·哈尔莫斯,我们在密歇根大学见过面。”(因为他是盲人,我猜想他可能需要额外的听觉认知的线索)。但是,他没有让我把话讲完,立刻就记起来,他向我这方向伸出手,表示欢迎我到莫斯科来。他的英语表达带有很特别的欺骗性——他发出几个他掌握的几乎十分正确的字来,使得你倾向于觉得他讲英语比他事实上能讲的要好得多。

差一点见不到普洛霍洛夫使我想起一些其他数学家,我希望能见到他们但是没能见面。其中一位叫F·V·希洛科夫(Shirokov),他解决了我提出的一个问题。他给我寄来过一个预印本,我们交换过几封信,我越来越喜欢他。我非常想见到他,但是没成,这使我很失望。另一位是近代调和分析的奠基人之一,格里高里·叶夫根尼耶维奇·希洛夫(Georgii Evgenevich Shilov),我安排见他而没见到令人十分奇怪。有一天,我被邀请去莫斯科数学会做报告。当我们鱼贯而入走进演讲厅中坐下时,会议主席我并不认识,宣布会议开始,并介绍报告人(这就是我)。因为他讲俄语,我只能去猜他讲些什么,于是我向坐在我身边的阿诺索夫小声问道:“他在讲什么?他是哪一位?”阿诺索夫十分惊讶:“你还没见过他?他是希洛夫。他正在介绍你。”我想,好了,我猜想我们也许报告之后会见面——但是我们没

能见面。报告结束之后，我回答了一两个习惯上出于礼貌提出的问题之后，所有人都站起来离开会场，希洛夫也不见了。真奇怪！

本来我能够见到许多其他苏联数学家，但是都没见到；也有许多数学家我的确见到了，这里没有提。做为这一节的最后一部分，我愿谈另外两位我见到的数学家。这两位都是重要的著名数学家，他们是西纳伊（Sinai）和克赖因（Krein）。

雅柯夫·格利高里耶维奇·西纳伊（Yakov Grigorievich Sinai）是在熵成为遍历理论的概念时，从这个基础开始做起的。我知道他的工作，曾经引用他的工作并且加以研究。我见到他时，他仍然很年轻（30岁），给人留下深刻的印象。我们马上感到彼此很投合，并且有许许多多可交谈的——当然首先是数学，还有美国和苏联数学家的培养方式，以及专业方面和世俗方面许多其他事情（他就是带我去看马戏的那位。）有一天晚上，他邀请我参加他的讨论班，只是听而不报告。讨论班给我留下深刻印象，而参加讨论班的学生给我留下的印象差不多同他给我的印象一样多。当时情况是这样的，西纳伊和我走进来，我坐下来，西纳伊用俄语讲了大约三分钟的话。我还能听出大概的意思：他指向我，讲出我的名字，建议讨论会其余时间用英语进行。的确就这么办了，讨论班进行得很顺利。几个学生报告他们过去学过的和思考过的定理和证明［其中一个后来享有盛名的是卡托克（Katok）］，他们全都用英语讲，而听众问问题和对回答的讨论也都用英语。

我同马克·格利高里耶维奇·克赖因（Mark Grigorievich Krein）（发音如Crane）的会见更为紧张，他是两兄弟中更为著名的一位。在斯捷克洛夫数学研究所，纳依玛克把我拉在一起，然后就离开了。接下来的会见结果就有两个主要的参加者：克

赖因和福亚什（Foias），还有两个小角色：克赖因的女儿和我。原来是介绍我同克赖因一起交谈的，结果我没能在这种组合中找到自己合适的对手。克赖因的女儿是来当翻译的，她讲的英语不太好但很有用，大致像我所讲的法语。她也没有什么自己的问题去插话或讲得比别人更响。

我同克赖因在莫斯科的会见多少有点奇怪。克赖因的家是在敖德萨，主要是因为这个理由，原来我把敖德萨列入我想访问苏联的城市之一。通过米申科的中介，我从克赖因得到消息，他将到莫斯科或者列宁格勒或者任何其他地方来同我会面，但是他不会在敖德萨见我，这事我从来也没有考虑过。

克赖因 60 岁左右，矮胖、结实、圆脸，几乎全秃顶，他留了黑胡须，不自觉的抽搐，右眼总是不由自主地眨动。他有神经质的习惯，几句话中都说 tak 和 da（“这个”和“是”）好几次。“一个充分且必要 tak 条件 tak 是 da 即 tak…”。他的女儿常常会随声附和，有时把克赖因正确的（可以理解的）英语改为某种合乎语法但不是惯用的英语，甚至有时在他讲得非常正確时也纠正。克赖因会讲“这个 estimate（估计）”（这是完全正确的数学英语），而她就会说“estimation（估计），爸爸”。当克赖因说“布劳茨基（Brodsky）提出这个…建议…这个词…”，女儿就会说“引进…，爸爸”。当他在错误的音节上发出重音，如在 arTICle 中，她就会中间插话纠正。当他讲“这是我希望加以强调（stress）之点”，她就会说“emphasize，爸爸，emphasize”。

我们在一起 3 个小时里大部分时间都是克赖因和福亚什进行分贝的较量。有时他们都很温和，而其他时候则没有好气，而且所有时间他们都试图超过对方。当克赖因开始在黑板上解释某个公式时，福亚什就会说“我有一个问题”，然后就接着讲他



M·G·克赖因，1965 年

自己那一套。克赖因说："我早在 1940 年就做过"，而福亚什马上反唇相讥"是啊，可是就是没有这么一般——让我给你看看真正的好方法……"。两个人你来我往：我先做出来的，不，我的结果更好，不，我的学生做出更一般的情形。

大多数时间我只好坐在那里，既感到好笑又感到郁闷，我还觉得有某种负罪感。但是我不清楚为什么会有这种状况。是否可能我并不那么热爱数学，还是我不那么喜欢数学家？我不会梦想强拉住一个陌生人让他听我谈话，注意我的工作，告诉他"这就是我上个星期证明的一些重要定理"，那怕是对我读过书的作者也不会。首先，我并不认为我上星期证明的东西如此重要（实际上它从来没那么重要），其次，我会感到自己傻乎乎的，第三，我认为他也不会在乎。

那天下午快结束时，克赖因骄傲地告诉我，他答复信件是

多么懒，多么没有效率，而现在他有了这个绝好的机会进行个人接触，他会充分地利用它。他递给我一大叠复印本（大约7英寸厚），并且指示我把它们送给他指定的各种各样的美国数学家。我太怯懦没有拒绝他。第二天我把整个这叠东西送到邮局，在那里让他们包裹（在美国没有这项服务），分别平寄给克赖因打算寄的收件人。本来向管包裹的年轻女士解释他打算干的事，克赖因要比我容易得多，只是那样他就要花费同样数目的卢布。

我碰到几位到莫斯科的访问者，他们的情况和我的差不多。在等待我们的饭菜时，我们就开始聊了起来。我特别记得其中两位：一位是意大利的历史学家，一位是加拿大的地质学家。这位意大利人是位温和的人，他着重强调一点：这是他“首次”到俄国，但他会设法让它成为“末次”。加拿大人表达的语言更激烈。他说，他拿不准他是否能够在俄国呆满一个月。他在这里什么事都干不成，所有事情都是一团糟。

他们究竟抱怨什么呢？文化冲击，部分是：不能交流，被忽视，没有组织，杂乱无章，对他们的访问缺乏兴趣，常常甚至连知道都不知道——这是一些回答。在家里哪儿都是熟悉的友好的环境，到这里他们完全处于一个陌生的、冰冷的、黑暗的城市当中，孤独，浪费时间。

使我感到有些惊奇的是，我自己却总是站在另一边试图让他们高兴起来。我说，能够见到我们的苏联同事是有些好处的，能建立直接的接触有好处，能在他们发表他们的工作之前就知道他们做什么有好处。——这些都是一些使专业交流个人化的一些十分明显的典型理由，但是，我自己心里也不那么信我所讲的。说真的，我和他们的观点一致，对他们的情绪也完全有同感。像我们参加的那种交流计划本来可能而且应该是国际合作的有效工具，但是由于许多人性上和官方体制上的不完善和

小小缺点，我们觉得它没能成为有效工具。总的说来，我的苏联之行并不愉快。无论在知识的传播上还是接受上，我认为我都成绩不大。我能说的只是，苏联之行是我的一次经历，从中我学到一些东西。但是，我说不清也不能令人信服地指出这一些东西到底是什么。

正如别人看我们一样

1964年，我从家直接去布达佩斯。我把布达佩斯称之为破烂、肮脏、黑暗而且令人压抑。而到1965年，我从莫斯科去布达佩斯，比较起来，我却觉得这座城市漂亮，充满阳光，色彩斑斓，令人欢欣愉快。这第二次匈牙利之行，我用了10天，其中几天到塞格德去，但这一次更多的是个人交往和旅游，而不像上次那样是职业上和数学上的活动。

的确，这次我也做了一两次报告并会见了几位数学家。由于一次愉快的巧合，我碰到了耶尔齐·沃希（Jerzy Łoś，发音如Wash），他正利用假期驾车环游欧洲，而我在塞格德时，他也正好途经那里。他是超积理论的主要发现者和发展者之一，是位有广泛文化教养的数学家和逻辑学家，也是位有吸引力的人。我们一起度过一个晚上，边吃边聊。除了其他方面，我特别佩服他讲外语的勇气。他对罗马尼亚语或匈牙利语连一个字也不会，可是他凭借他个性的力量，始终保持镇静和彬彬有礼的态度。他无论是在布加勒斯特和布达佩斯的书店里，或挤满人群的车站，还是在餐馆中，他都能赢得别人的喜欢和理解。他很快就使每个人都知道，他来自波兰。因为波兰人在东欧，包括匈牙利，比较受人欢迎，这对他很有好处。

我在塞格德见到的另一位数学家是阿提拉·马泰（Attila



J·沃希，1965 年

Máté)，当时他非常年轻(16 岁?)，那时他的兴趣主要是集合论，特别是令人毛骨悚然的大基数理论。他极富天才，以致当局准许他提前两年读完中学并接纳他上大学。这几乎是史无前例的。从那时起，他表现出他的天才也能包容数学中许多完全不同的分支。例如，当卡莱松（Carleson）解决了鲁金猜想（关于 L^2 中函数的逐点收敛问题）这后，马泰写了一篇评述，帮助我们这些人理解他的证明到底是怎么一回事。几年之后，他移居国外，现在好像定居在布鲁克林，就像他一度定居在塞格德一样。

我第二次回乡访问的所见所闻不是数学，而是关于匈牙利的一大堆奇怪的事实以及匈牙利对美国的态度。

例如，考虑一下民主的根本含义。在我们从塞格德返回布达佩斯的路上，我们几个人（包括纳吉和我）乘坐的车是由一

位大学职员开的，有些谈话他也插话（虽然有点屈尊俯就，我想）；当我们到达布达佩斯，纳吉下车时，还向司机挥手致意。但是，在我们到达布达佩斯之前，我们中途停车去喝咖啡，碰到了另一位大学的汽车司机。他把手放在他的裤子边，做出立正的姿势，向纳吉鞠躬行礼。我们的司机提议收取我们咖啡券（在喝咖啡之前先付款，然后凭你买的券领取咖啡），替我们排队。我们这些贵族，端着我们的咖啡到“普莱索”高级地方去用，而司机们则端着他们的咖啡到另外一个地方用。我事先已经问过规矩，于是当我下车时，我给司机一点小费。一开始他说不要，但后来他接受下来。社会化的君主制度造成一种奇特的民主。

在匈牙利十分流行一种关于社会政治方面的调皮捣蛋的幽默（常常夹杂着残存的民族的下流笑料）。例如，在苏联，假如你又能读又能写，你就被称为知识分子；假如你只会一样，那你就称为专家。在匈牙利，这个文化玩笑又进了一步。警察分两拨巡游，一拨能读，一拨能写。但在马罗尼亚，警察分三拨活动，一拨能读，一拨能写，还有一拨盯着知识分子中的不可靠分子。

君主制度文化中某些好的东西仍然在匈牙利起作用。例如，餐馆和饭店中的服务是一流的，这与苏联的情况不同。在布达佩斯早餐的女服务员请客人点菜，她甚至能用法语、德语或匈牙利语同顾客开玩笑；她能在 5 分钟之内就把我的早餐送到，而不是 35 分钟。门房是位老年人，他穿着一身干净整齐的制服，用蹩脚的英语向我抱歉，说他不能讲英语，但是他说，除了匈牙利语之外，他只能讲法语、德语、意大利语和俄语。

在匈牙利，次要的服务（例如小店或有轨电车所提供的服务）也很好；而主要的服务（例如邮局和航空）却很糟。里夫

斯（Révész）告诉我，他有一次从布达佩斯打电话到德布勒森（差不多同伊利诺伊的香槟到芝加哥的距离一样），他花了2个半小时才打通，这他一点也不感到吃惊。还有一次，他从密歇根州打电话给布达佩斯，长话接线员在开始工作之前向他表示歉意。他解释道，匈牙利人有时做出反应比较慢。最后他先挂断，等她接通之后立即打电话给他。她在15分钟之内打来电话，并且再次抱歉接通太慢。

我在塞格德看过田纳西·威廉斯①的《夏季与烟尘》（当然是用匈牙利文演的），还在布达佩斯看过《奥本海默事件》。后一出剧十分接近事实，不过加上一些奇特古怪的事。例如，在假想的美国法庭中，居然有苏打水自动售货机放在小吃桌子上；“Evans”发音成“Eevans”；J·罗伯特·奥本海默（J. Robert Oppenheimer）的第一个大写字母发音成gee；而且美国国旗上有50个星（这与当时情况不符）。演奥本海默的演员完全不像他本人，但是他演得很好，看来他看过关于奥皮（Oppy）的影片并仔细研究过，他的言谈举止非常逼真。后来，我写信给奥皮，告诉他，听到他讲流利的匈牙利语十分奇特。

尽管有像田纳西·威廉斯和J·罗伯特·奥本海默这样的文化输出，但还是存在对美国生活的大量错误信息，而所有人还都把它当成绝对真理。例如，公众周知，在美国，鞋子从来是不修补的，鞋子一旦穿坏，就只有扔掉。（这种图景的另一面，我听说在匈牙利有抽丝的修补店，这使我很吃惊。一旦妇女的长统袜、长统丝袜抽丝散线，你可以送到那里去补。）我还听到权威的说法：(a) 在美国，每个人总都是上气不接下气地奔忙，因此，小的、田园式的匈牙利平静生活要好得多。(b) 在匈牙

① 田纳西·威廉斯（Tennese Williams 1914—1983）美国著名剧作家，著有《欲望号街车》、《热铁皮屋顶上的猫》等。——译者注

利，每个人都总是不停地为衣食奔忙，害怕受饥寒之苦，因此，新大陆更为闲适的生活步调让人羡慕。

在语言差别之上的文化差别使得交流极端困难。讲一种你不感到是你自己的语言，你就得集中注意力于你表达的方式，特别要考虑奇特的习惯用语和奇怪的陌生的思维。甚至于当人家要你解释你熟知的事物，甚至你也有使用的词汇，文化也会使你束手无策。如果你想教霍屯督人[①]微积分，除了微积分和霍屯督人之外，你还必须懂得更多。你必须懂得霍屯督的文化，你还必须知道，在你的学生的经验中哪里出现直线，在他的经验中什么是变动的，他量度东西时，用的是什么单位。为了给我的小姨子解释美国的大学，我必须了解匈牙利的学校，匈牙利的牙医，匈牙利的铁路俚语——一句话，匈牙利的文化。我不了解这些，因而我办不到。因此，我最好还是回家去。到了家这些事我甚至连想也不去想就可以弄清楚。

① 非洲南部的原始民族。——译者注

第十四章　怎样干几乎所有事

退　稿

我的能力在60年代达到顶峰。它可以解释成为，当我这么讲的时候，我已经达到并越过我能力的极大值，我已经越过山顶。你的能力的顶峰只需片刻就达到了，从那时之后，其余时间你就走下坡路。我度过我的一生是用单一价值系统来衡量的——研究工作就是全部——因此这里所说的顶峰的高度是指定理，或者，用更好的词来讲，是洞察力。

60年代，我的数学水平线上3个最明显可见的概念可以用3个词来表达：托普利茨（Toeplitz），切萨洛（Cesàro）和拟三角形。

托普利茨算子在我刚到密歇根州之前在芝加哥大学告别会上起着十分巨大的作用。我不明白为什么托普利茨矩阵如此吸引人，但是，事实是，每位数学家只要知道托普利茨矩阵就会觉得它们很自然，而且很有趣（托普利茨矩阵是每条对角线的元素都具有同一值，$a_{i,j}=a_{i+k,j-k}$）。阿仑·布朗（Arlen Brown）和我逐渐被托普利茨矩阵迷上了。我们读有关的论文，主要是菲利普·哈特曼（Philip Hartman）和奥莱尔·温特纳

(Aurel Wintner) 的论文,并开始提出有关它们的问题。我们得到一些令人满意的眼光,我们认为我们真正理解了,是什么使得哈特曼-温特纳定理起作用,我们对于托普利茨算子一个刻划,从而奠定对它们进行代数研究的基础。我们的论文现在已经是老掉牙了(它发表在 1963 年),从那时起,这个理论已经有了长足的进步。但是,我还是以我对它有些贡献而引以为自豪。

切萨洛算子的研究工作是另一项合作的结果。当我同阿兰·席尔兹的两人讨论班由于阿仑·布朗的加入而成为三人讨论班的那年我们完成这篇论文。当时我们都在密歇根,星期二下午我们聚在一起,用两个多小时,边饮咖啡边谈切萨洛(难道每个人都知道切萨洛矩阵吗?它是一个矩阵,把一个序列转换成一个均值序列,即它们的第几行的矩阵元,前几个都等于$\frac{1}{n}$,而其余的等于 0)。我们对这种矩阵考虑有界性定理和谱定理,而且对其"连续的"情形也考虑同样问题,包括有限情形和无穷的情形。我们解决其中许多问题,但是让一个问题绊住了:我们不能证明,经典的切萨洛算子是次正规算子。这个证明一直到 6 年之后才被汤姆·克利特 (Tom Kriete) 和大卫·特鲁特 (David Trutt) 发现,这是一项困难而深刻的成就。

对多项式紧的研究是 60 年代最为激动人心的数学事件之一。紧算子总有非平凡的不变子空间这个定理第一个发表的证明是来自纳赫曼·阿隆萨延 (Nachman Aronszajn) 和肯南·斯密司 (Kennan Smith),它在 1954 年发表。斯密司指出,证明太"紧凑"了,我也几乎可以说这是一种抱怨。它完全没有留下修改和推广的余地;它精确地证明了原来设计好要证明的,一点也不多。举例来讲,它根本无助于证明:紧算子的平方根也

必定有非平凡的不变子空间。

在论文发表之前几个月，阿隆萨延在餐馆的一张餐巾上教我这个证明。我理解这个证明，我也珍爱它，同许多其他数学家一样，我一直试图“弄松”“解开”它，使得我们能更广泛地应用它，但全部归于失败。1966年初，艾比·鲁滨逊寄给我一个预印本，是他和他的年轻弟子艾伦·伯恩斯坦（Allen Bernstein）合作写的。他们证明，紧算子的平方根的确有不变子空间。这真令人惊喜，令人震动。伯恩斯坦和罗滨逊的确找到正确的代数方法把这个结果加进来。他们用p（x）来取代x^2，其中p（x）是任意非零多项式；他们证明，如果一个算子A使得p（A）是紧算子，则A具有不变子空间。（我想我发明了“多项式紧”这个词来表征这种算子。）他们的主要成就，就是大家苦苦追寻的“松化”；他们表明，阿隆萨延-斯密司的技巧不像我们害怕的那么狭窄。

伯恩斯坦-罗滨逊的结果鼓舞我重新研究那项技巧，我想我已经发现是什么使它成功，我抽象出这个技巧的主要性质，我称之为拟三角性。在我写的关于这个主题的论文中，我为拟三角算子理论迈出最初的几步，并且猜想，这类算子的确是我们的朋友，也就是说，它们都具有不变子空间。这个概念颇受欢迎，到现在已经有不少论文讨论它，它已经成为算子理论的一个标准的组成部分。罗马尼亚学派特别努力的研究它，其中一些人即阿波斯托尔（Apostol）、福亚什和沃伊库列斯库（Voiculescu）证明其中最深刻、最惊人的定理。他们证明，非拟三角算子肯定是我们的朋友，也就是说，非拟三角性蕴涵不变子空间；假如我的猜想是正确的话，那么不变子空间问题就会得到肯定的解决。我承认这事使我不安，因为我相信不变子空间问题答案是否定的，于是我放弃原来的猜想，代之以进而

寻找一个拟三角算子的反例。

我很喜欢托普利茨算子的论文，也喜欢拟三角算子的论文。令我非常欣慰的是算子理论界一些人逐步同意我的意见。这两篇论文曾被称为经典之作（不是我叫的），它们似乎都已列为各自主题的文献目录的必备文献。我之所以不太谦虚地提到这个事实的原因是：给那些读了我这一段而且同那些吹毛求疵的审稿人和编辑有麻烦的年轻人一些勇气。我的意思是，这两篇论文在我第一次投稿中均遭到退稿，托普利茨算子那篇被《数学学报》[1]退稿，拟三角算子那篇被《美国数学杂志》退稿。对于后一篇，我写信给安布洛斯说："……上星期我的一篇论文被退稿……，我很气愤……，它伤了我的自尊心……，但是我所能实实在在做的就是把手稿放到另外的信封里寄到另一家杂志去……它的确是一篇非常好的小论文，具有一个小的但肯定是新的想法，我想它应该发表而且肯定会发表出来的。"振作起来！审稿人和编辑的判断并不总是正确的。

怎样做研究

一个人能否告诉另一个人如何做研究，怎么样才能有创造性，怎样发现一些新东西？这几乎是不可能的。我已经很长时间尝试掌握数学，理解数学，发现真理，证明定理，解决问题，而现在我只是试图讲述一下我是怎么走过来的。这个过程的重要部分是心理上的，是不能描述的，但是我至少能对其物理部分试着做一下。

数学不是一门演绎科学——这是一句陈词滥调。在你想证

① Acta Mathematica，瑞典出版的最权威的国际性数学期刊之一，尤以分析方面论文见长。——译者注

明一个定理时，你并非只是列出假设，然后开始推理。你可做的实际上是尝试与错误，做实验，进行猜测。你想发现的是事实是什么，而在这方面你所做的同实验室技术员做的很类似，两者的差别只在于精密程度和信息不同。可能哲学家看我们数学家的方式就同我们看技术员的方式是完全一样的。

我喜欢做研究工作，我想做研究；我不得不做研究，但我不喜欢坐下来开始做研究——我总是试图尽可能长时期地推迟它。

对于我，重要的是我有一些外在的大事，而我自己内在的事，使我能够献身于它。高斯和戈雅（Goya），莎士比亚和帕格尼尼（Paganini）是卓越的，他们的卓越给了我快乐。我羡慕他们，妒忌他们，他们也是有献身精神的人物。卓越只有少数人才能达到，但是献身精神则是每个人都能具有的也应该具有的，而没有献身精神，生命就不值得活。

尽管我具有很大的情绪动力进行工作，我还是不喜欢开始做它；它是一场无时无刻不在进行的战斗和拼搏。是否有什么事我能够（必须?）首先去做？或许我不该把我的铅笔削尖吗?事实上我从来不用铅笔，但是"削尖铅笔"成为做任何事的代码词，只要它能帮助我们推迟集中创造注意力的痛苦到来。像在图书馆查资料，整理过去的笔记，甚至备明天要上的课时，我们都可以找到籍口，一旦这些事情解决以后，我就真能集中注意力而不被打断。

卡迈克尔抱怨，他当系主任时，每星期只剩下不足 20 小时做研究。我对此真感到惊讶，而且现在仍然惊奇。在我最富有成果的年代里，我可能一周年平均有 20 小时的集中数学思考的时间，大大超出 20 小时的情况极为罕见。在我一生中，这种极为罕见的例外只出现两三次，那时我的思想长长的阶梯正在逐

步逼近其顶点。虽然我从来没当过研究生院院长，我似乎只有每天干三四小时工作，“实实在在的工作”的心理能量；而其余时间我写书、教书、写书评、交换意见、审阅论文、做报告、编辑、旅游以及我可能想到的一般的削铅笔的方式。每个人做研究时都会进入不出活的休闲时期。在那个时期中我就开始干其他的职业活动，甚至落到教三角的地步，做为藉口也可以说为了谋生。是啊，是啊，今天我没有证明任何新定理，可是至少我讲正弦定律讲得相当不错，而且我还挣了钱。

数学家为什么要做研究工作？这问题有几种答案。我最喜欢的答案是，我们有好奇心，我们需要知道。这同“因为我们想要”的回答差不多一样，我接受它，这也是一个好的回答，不过，也有许多其他的答案，它们是更为实际的。

我们给未来的工程师、物理学家、生物学家、心理学家、经济学家，当然还有数学家，讲授数学。如果我们教他们只是去解书中的问题，在他们毕业之前，他们的教育就会已经过时。甚至从粗浅的、世俗的、工业的、商业的观点来看，我们的学生也必须准备去回答未来的问题，而这些问题甚至于在我们的课堂上连提也没提出过。只教他们所有已经知道的东西是不够的，他们必须知道如何发现尚未发现的东西。换句话说，他们必须训练去解决问题，也就是去做研究。一位教师如果不总是去考虑解决问题，去解决那些他还不知道答案的问题，那他从心理上就干脆没有准备去教他的学生们如何解决问题。

有一部分研究工作我不擅长，因此从来也不喜欢，那就是竞赛或竞争。我可没那么快抢在对手之前获得名声和荣誉。我不试图拿到金牌，而是躲到与主流方向相垂直的某个方向上，希望能找到属于我自己的小而深的死水地区。我不愿意花费时间试图去证明著名的猜想然后以失败告终，我宁愿去试图提炼出

来一些尚不清楚的概念并表述富有成果的问题。在一个人一生中，你不可能总是这样干，假如概念和问题的确是“正确的”，它们就会被广泛采用，于是你就会觉得你自己在发展你自己的学科方面，被那些具有强有力的技巧和深刻想法的人大大超出了。这有道理，我完全能够接受它，这是一种公平的分工。的确，我真希望我能够证明次正规算子的不变子空间定理，但是至少我干了一些事：我引进了这个概念并指明了道路。

游离在竞争之外还有一方面就是贬低匆匆忙忙的重要性。我扪心自问，在最近苦心得到的成果中再干上一两年有什么问题？我告诉自己，什么问题也没有。但是，甚至对我来说，有时结果根本做不出来，而对一些有着不同心理结构的人来讲，那样就不对头。当罗莫诺索夫（Lomonosov）的消息突然传出来（关于可交换紧算子的公用不变子空间）以及斯科特·布朗（Scott Brown）的消息（关于次正规算子）传出，我同周围的算子论专家一样激动，而且我急于迅速地了解细节。但是，这种突破实在罕见，因此，我只能在落后于时代的情况下愉快地度过我大部分时光。

好了，远离竞争，垂直主流、落后时代，那么我真正能干什么呢？答案是，我写作。我坐在我的木桌旁，拿起一支黑色圆珠笔，开始在一页 $8\frac{1}{2}\times 11$ 的横格纸上写。在右上角写上“1”，然后开始“这份笔记的目的是研究，秩 1 的微扰能对格的结构有什么影响……”，当这段结束时，我在页边用一个大的黑粗体 A 字来标记它，进而写 B 段。页码和段落的字母构成一个参照系，常常有几百页：87C 就表示 87 页的 C 段。我把这些页放入三环的活页笔记本中，在笔记本的脊面上标记：逼近、格、积分算子，等等。如果一个计划成功，笔记本就变成一篇论文，

但是不管成功与否，笔记本一般都不丢掉。在我书桌旁的书架上，总有几十本笔记本。我一直希望不完全的笔记本会增厚，而后来导向发表的笔记本结果会包含一些被忽视的宝贵的眼光，而这种眼光正是解决尚未解决的主要问题所需要的。

我尽可能长时间坐在我的木桌旁，它可能意味着只要我还有精力或者我还有时间，我就一直坚持坐着。我试图把事情安排得在一处向好的方向发展的地方停住，例如，一个解决的引理或者在最坏的情形下，提出一个没有考虑过的但不是显然没有办法解决的问题。这样我的下意识就能继续工作，在最好的情形下，当我到办公室去或者到班上上课或者甚至在晚上睡觉时，我还能取得一些进展。有时，我抓不到答案会使我保持清醒，但是，我似乎找到了一种办法来糊弄自己。在一阵翻来覆去睡不着之后，不太长，通常只有几分钟，我就“解决”了这个问题；灵感一闪，证明或者反例就出现在我的心头，我感到满意，翻个身就睡着了。这一闪念几乎都带有欺骗性：不是证明有一个大漏洞，就是反例什么也没反。没关系。我相信解答会足够长，足以让人迷糊。令人奇怪的是在夜里，在床上，在黑暗中，我从来没有不相信我的“眼光”；它是如此令人愉快，以致于我毫不犹疑地接受它。在某些情形之下，结果甚至是对的。

我不介意我工作时有钟表在身边。如果因为上课时间到了或者该去赴宴，我必须停止思考，那我就高兴地放下我的笔记本。当我下楼上教室去时或者发动我的汽车、关上汽车房的门时，我可能还在思考我的问题。但是，我并不因为被打断而懊恼(我的一些朋友讲，他们就这样)。它全是生活方式的一部分，我知道，几小时以后，我们——我的工作和我——又将聚在一起，这就使我感到愉快。

好的问题，研究问题从何而来呢？它们可能来自同样隐藏不露的洞穴中，在这个洞穴中作家找到了他们的情节，作曲家发现了他们的旋律。没人知道它在哪里，甚至于有一两次幸运地碰巧找到，也不记得它在哪里。有一件事是肯定的，它们肯定不是来自进行泛泛推广的意愿，大概反过来才对：所有伟大数学的源泉都是特殊情形，都是具体例子。在数学中常常出现这样的情况：每当一个概念具有似乎很广泛的一般性时，它本质上就同一个小的特殊情形一样。通常正是特殊的情形最先暗示出推广或一般化的。而精确表述“本质上相同”的方式就是表现为一个表示定理。关于线性泛函的黎斯（Riesz）定理就是典型。在一个内积中固定一个向量就定义一个有界线性泛函；而有界线性泛函的抽象概念似乎是很大的一般化；事实上，黎斯定理就是说，抽象概念的每一个例子都来自具体的特殊的方式。

这个主题似乎是狄奥东涅和我有意见分歧的许多主题之一。有一次我在马里兰召开的讨论会上做报告，狄奥东涅当时也正好访问那里。他曾多次去那里，这是其中的一次。报告的主题是正定逼近。我提出的问题是，在希尔伯特空间中给定一个任意算子 A，求一个正定（非负半定）算子 P，使得 $\|A-P\|$ 极小。我很走运：结果有一个很小的具体的特殊情形，其中包含所需要的所有概念，所有的困难以及所有的步骤来理解和克服困难。我的报告于是集中在这个特殊情形：C^2 上由 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 定义的算子。我感到很自豪：我觉得我成功地讲述了一个漂亮的问题以及其满意的解答，而不必陷在无关的分析技巧的泥沼之中。狄奥东涅很有礼貌，很友好，但后来明显表现出一种优越感。我不确切记得他讲的话，实际上，他祝贺我进行一次古怪有趣的表演，它似乎给他留下了“数学游戏”的印象，而这在他的词汇中似乎有讥讽的味道；虽然十分有趣，但是人工做作，

流于肤浅。我认为（并继续认为）它可远远超出这种水平。我们评价的不同来源于我们观点的差别。我想，对于狄奥东涅来讲，重要的结果是强有力的一般定理，从中可以容易地推出所有你所需要的特殊情形；而对我来讲，向前迈出的最为重大的一步是阐明中心的例子，从中你可以容易得出处理所有周边全盘一般性的眼光。

作为数学家，我最大的强项是能看出，在什么情况下两件事物“相同”的能力。例如，我一直对大卫·伯格（David Berg）定理（正规等于对角加紧）迷惑不解，直到我注意到他那乱七八糟的证明同证明“每个紧统都是康托尔集的连续象”十分相似，我才得到了领悟。从那以后，我们就不需要用古典命题的应用而获得很大的启发，而只要从证明即可得到。其后果就是我们发现得到伯格结果的一个简洁漂亮的新方法。

这种事情我还可以举出许多例子。最突出的一些例子出现在对偶理论之中。举例来讲，研究紧阿贝尔群就等于研究傅立叶级数；研究布尔代数就等于研究完全不连通紧豪斯道夫空间。其他不是对偶理论的例子：经典的逐次逼近法就是巴拿赫不动点定理，而概率论无非就是测度论。

这种洞察力使得数学干净漂亮。它撇掉那些脂油，使人看清楚其内容实质。它能否推进数学的发展？是否伟大的新思想真正只是认知两件事物完全一样？我常常这么认为，但并不是很有把握。

那么，这是否回答了怎样做研究工作的问题了呢？

不变子空间问题

为了成为一位做研究的数学家，你除了提出问题和解决研

究问题之外还必须做得更多。你必须同日益增长的文献保持接触，它们的页数每天都在平稳地、毫不含糊地增加；你肯定必须觉察到偶尔浮向表面的一些惊人消息，不管它是一个垮掉的猜想还是一个辉煌的胜利。60年代一件最惊人的数学新闻是德·布兰吉斯-罗夫尼亚克（Rovnyak）宣称他们解决了不变子空间问题。

路易斯·德·布兰吉斯(Louis de Branges)和我在1962年开始通信并交换抽印本。一年之后（当时他在普杜大学），他要我把他的一份研究短讯提供给《美国数学会通报》(Bulletin)上发表，我也很乐意这么做。我们的关系友好而拘礼。我在信件里称呼他为"亲爱的德·布兰吉斯教授"，而他给我的信里包含如下的句子："我十分感谢你对我的工作所表示的兴趣，并不是所有人都能理解它。"

1964年4月一个下午，我到拉法耶特参加一次学术讨论会时，我见到他以及崇拜他的学生小集团。在我们事先约定的时间，我到他的办公室去，可是他并不在；大卫·特留特（David Trutt）(他的小集团的一员）见到我，看起来神神秘秘的，对我说德·布兰吉斯被耽搁了。他迟到时间不长，后来德·布兰吉斯带着他的夫人，和吉姆·罗夫尼亚克（Jim Rovnyak）以及另外他当时的两三名学生来了。他向我致意，递给我一份手稿，并解释迟到的原因：他说，我们干了一夜，把这份手稿最后定稿，全部打印出来，准备送交给你。"这个"只是几页，是一个短讯，而不是全文，其中证明：维数大于1的复希尔伯特空间上每个有界线性算子有具有一个非平凡的闭不变子空间！

当然，这使我大吃一惊，感到巨大震动，可是再没有什么时间谈别的了，讨论会前的咖啡很快就送上来。我下周回到安·阿伯之后，我就写信给负责这事的《通报》编辑埃德·斯潘



L·德·布兰吉斯，1965 年

尼尔（Ed Spanier），信内容如下：

"所附德·布兰吉斯和罗夫尼亚克的论文，题目是'不变子空间的存在'随信寄上做为《通报》的研究短讯发表。我已读过两遍，觉得令人十分鼓舞。由于该文过于紧凑而且没有证明，以致我不能保证它是对的，但在我的心目中无疑它值得发表，而且应该尽快发表。这个问题十分重要，而且长期以来是个突出的问题。德·布兰吉斯名声不错，万一论文中出现错误（当然我们全都不希望它出现），这错误肯定是重大的错误。创建'研究短讯'栏正是为了发表这类论文的。"

我寄出这封信一周之后，我收到大手稿，也就是其中提供了所有证明的细节，而这些在短讯中是没有足够篇幅来讲的。一

份大手稿已经寄给《美国数学会汇刊》(Transactions) 发表，而德·布兰吉斯和罗夫尼亚克把预印本寄给几位数学家，我是其中之一。伴随大手稿，开始新一轮通信，而且通信的频度和内容都迅速增长，直到6个月之后到达顶峰。一位细心的，但不是精力十分充沛的审稿人往往需要超过6个月的时间才能做出结论。但是，这一次，"每一个人"都感兴趣，许多数学家都在审阅预印本并且诅咒它（它极其难读，论述在某些地方过于压缩，而在另外一些地方又太啰嗦，通篇论文很不清楚)，有几组数学家相互接触，互相介绍他们发现的漏洞以及弥补漏洞的方法。

罗恩·道格拉斯 (Ron Douglas) 当时是密歇根大学数学系年资较浅的成员。他是位有相当天赋的年轻数学家，具有非凡的野心以及过人的精力。他思想极为敏捷，而且总试图讲出来也像他想的那么快，结果他讲出的东西一半是废话，而另一半表现出深刻的眼光。通常他能在任何人有时间查觉并做出反应之前，就能自己抓住蠢话并用连珠炮式的行话加以掩盖。他讲"嗨，那不是我的意思"的方式就是"换句话说"(他把 in other words 发音成 'n 'zer w'rs，有时在一句中不只说一次)。听他谈数学真是颇受启发、非常受到鼓舞但也是十分累人的经历。

罗恩和我开始阅读德·布兰吉斯、罗夫尼亚克的大著并且在一起讨论它。同时，彼得·拉克斯 (Peter Lax)，当时是《汇刊》的编辑，问我是否愿意成为三人评审委员会的成员之一。这真是一个不平常的步骤。参加委员会或者不。我能列出两打数学家，他们从头到尾看过全文，常常是一句一句，一个字一个字地仔细看。对于一篇处于胚胎时期的论文，读者的数量真是够多的。他们中有阿仑·布朗，彼得·菲尔莫尔 (Peter Fillmore)，此外还有亨利·黑尔桑 (Henry Helson)，角谷静夫

(Shizuo Kakutani)，阿伦·希尔兹，乔·斯坦弗利，每个人都希望参加。

7月初，我写一封传阅信给编辑和有关审阅人。"这份材料我已经十分艰苦地工作两个月了，我感到十分疲倦。我非常想回去做一些我自己的定理了。另一方面，道格拉斯，还没有疲乏。我提出建议：从此我辞去审稿委员会成员职务，并郑重建议彼得任命道格拉斯来代替我的位置。"彼得传阅的回信很快来了："教练致球队：R·G·道格拉斯参加，在左端代替保罗·哈尔莫斯。下一场中他要考虑定理5。"

定理5只是一个有麻烦的地方。罗恩发现证明中一个错误并且给该命题一个反例。德·布兰吉斯进行一阵子英勇的战斗，不久就退却了，然后他指出如何绕过这个困难。罗恩发现，下一个问题是引理12，由于它是前溯的，在定理3处爆出一个漏洞。德·布兰吉斯设法把它堵住，使得定理14免于垮台。这样不断出现问题，不断地解决。道格拉斯和德·布兰吉斯以一种疯狂的速度交换信件，其中大多数我都有复印件，读这些信真令人神往。

那年初秋某个时候，可能在9月份，德·布兰吉斯和罗大尼亚克准备一份修订后的预印本。准备这份材料花费他们大量时间、大量精力，还有大量金钱。财务上的支出太多以致他们不得不采取非常的步骤，但是这也不是一个史无前例的步骤。他们要求每个希望得到一份修订本的人付3美元以帮助支付开支。我们许多人包括我在内，都非常愿意这样做。

9月末，普杜大学发出新闻稿：**两位普杜大学科学家宣布他们解决著名的数学问题**。它一点没有降低这项成果的重要性。这没有烦扰我。[杰克·麦克洛克林(Jack McLaughlin)后来看到它时说："这里有好多话要收回。"] 令我心烦的是中间的一段，

我可以完全肯定，这是代表作者的态度的。原文如下：

“他们的证明尚有待证实。这项工作十分复杂，包括70多页密切相关的数学推理，为了证明其正确性可能要使其他数学家花费长达一年的时间研究这个证明。5月份德·布兰吉斯-罗夫尼亚克的论文已经投寄给《美国数学会汇刊》，其后该杂志的编辑就开始进行这项工作。”

我的 bête noire（最厌恶的东西）又来了：作者们把编辑和审稿人当做助手，当作“验证者”，当作证明校订者来利用。

到12月问题终于得到解决。彼得·菲利莫尔发现一个不可弥补的漏洞，德·布兰吉斯给我写一封信，我感到非常遗憾。信中一段是这么说的：“我非常抱歉让你支持一个错误的结果，但是我看不出有其他方法来减少这个风险。在一个重大结果宣布之前就得到可靠的证实似乎是不太可能。”

我要求他准备一个简短的声明在《通报》上发表（研究短讯已在《通报》上发表），以澄清事实。他照办了。其中只有几句话，第二句是“我们现在收回这个短讯，对于存在不变子空间的问题不能做出肯定或否定的陈述。”当时研究短讯发表时都指出接受它的委员会成员名单，例如，原来德·布兰吉斯-罗夫尼亚克的研究短讯在作者的姓名下面就有“由P·R·哈尔莫斯递交”的短语。对于这个撤回的声明，我轻率地建议《通报》的编辑（而不是作者！）在开头注明“原先由P·R·哈尔莫斯递交”，但是没有人甚至咧咀一笑：这种情况实在太严肃了，开不得半点玩笑。

除了下面两则附言，这个故事就算结束了。

附言。撤回的声明发表在《通报》的1965年3月号上。几个月之后（8月）在《美国数学会通报》上发表德·布兰吉斯-罗夫尼亚克的一则摘要如下：“我们原先宣布，希尔伯特空间的

有界线性变换总存在不变子空间。在R·A·菲利莫尔博士发现论证中存在漏洞后，我们已撤回这个声明。现在我们已经使用一个新方法，从特征算子函数的因子化来得到不变子空间。我们原来宣告的结果仍然成立。”这最后的挣扎为时很短。1965年11月号的《通报》发表一段更正“这个短讯被撤回。R·G·道格拉斯在定理的证明中发现一个漏洞。”

再附言。一个夏日我的信箱中有一封信，它是占姆·罗夫尼亚克表示友好的悔恨心情的短信。我没有保存这封短信，但其精神实质大致是这样：我们寄给你的商品是有缺陷的，我们可能做的不过是退还你的钱。他随短信寄来3美元的支票。

不，再三思考之后，数学上的故事是永远不会结束的。定理永远向前发展，不断地进步，有时个别的数学家似乎不停地试验、错误、试验、错误，再试验，我们希望最终取得辉煌的成功。路易斯·德·布兰吉斯的失败并非故事的结局。1984年，他的大名将被永志不忘，这不是由于他没做成的事，而是由于他做成的事。他证明了毕勃巴赫（Bieberbach）猜想，这是首先在1916年表述的关于单叶解析函数的泰勒（Taylor）级数的猜想。在他之前有几十位（几百位?）数学家试图证明这个猜想但都没有成功。

有朋相助

在美国，在大萧条之后以及战后的40年代，数学家出现短缺。而到50年代末，则成立一些委员会研究如何阻止哲学博士(Ph. D.)生产过剩。到60年代，我们再一次趾高气扬，没有足够的数学家够大家用的。任何人都能找到工作，找到好工作，假如他不喜欢，他还可以换另外一个工作。我们试图通过更换

的办法来解决数学家人数过少的问题。另一种解决办法是把师范学校（原来建立是为了培养师资的）和母牛学校（有时称为农业和机械学院或学校）转变为生产哲学博士的大学。其结果就是质量下降，薪金上升，以及新创建的哲学博士计划中疯狂地争夺位置，这创造出许多高级职务比它培养出用于填补低级位置的职务的人才还要多。到了70年代，上升趋势再度下降。首先经济衰退对于新生的哲学博士打击最大。有故事讲，有的人不得不离开学术界到他老爸的硬件商店去工作。不久之后，这种情况稍稍缓和，又出现下一个让人抱怨的“六龄童”——这些人是6年之前获得博士学位的，他们按照不是提升就滚蛋的规则，应该授予终身制或者被解雇。他们常常被解雇。80年代在开始缓慢的衰退之后，似乎情况再一次好转，顾客们喧嚣着挤在门口，但是没有足够的人来接待他们。是否其中有什么模式？

在60年代使工作岗位的提供富有吸引力的一个标准方式，除了提高工资和降低教课负担之外，就是容易得到公休假（7年休1年）和短期休假。你总是向你的朋友告别，不是因为他们刚刚接受西雅图或石溪的工作职位，就是固定他们要在伯克利或波恩呆上一年。没有人十分清楚别的人在哪里，说某某人“在芝加哥大学”的意思是，如果不是休一年的长假，或者这学期不在本校上课，或者去特拉维夫出席两星期的学术会议，那他可能就会在埃克哈特大楼度过一段时光。

60年代，我多次外出访问，但是我只有一个学年的长公休假。1965/1966学年，受到当地气候的诱惑，我到迈阿密大学（不太尊敬地被称为晒黑大学）去教书。在那里我交了几位朋友，特别是吉米·迈克奈特（Jimmy Mcknight）和鲍伯·巴格利（Bob Bagley）。1月份我能享受到刚刚采摘下来的草莓，但是从

精神上讲，我还是想回到雪泥四溅的安阿伯。吉米和鲍伯彼此也是好朋友，他们允许我加入他们的俱乐部。他们都是敬业的数学家，尽全力试图把他们的学生教好，只是这些学生的智力品质，上大学之前受的训练，以及反对学术界的态度是不可救药的、令人沮丧的差。鲍伯现在仍在那里，仍然在教书，但是吉米后来就离开了。

吉米和我经常通信。他喜欢词语，他喜欢玩弄词藻，他能写出所能想像到的最复杂的信；詹姆斯·乔伊斯[1]（James Joyce）必定从他那里学习过，听过他的课。我最近给他写的是一封多嘴多舌的信，过期6个月，其中除了别的事之外，我分析了我自己和他，还把我们进行比较。我写道“你的生活中值得纪念的和可以见到的部分在于它完全献身给真理和正直。你告诉你的学生真理，并尽力坚持不论是学生，还是同事、朋友、系主任和院长一定要诚实和正直，你为此付出很大代价，而且完全是无私的。你似乎还能更自然的，不费任何力量这么做。至于我，我咆哮大怒，我把房子吹倒，弄出很大的噪音，最后还使自己——不能不使自己？——做出某种妥协。我真妒忌你。”

吉米面团团的脸，很懒。他喜欢喝啤酒。他是我所认识的最热心、最机智的人之一。他吸烟太多以致早逝。

尽管密歇根的气候很不好，特别是同迈阿密相比，我还是喜欢安阿伯的生活。华什特诺县既不太平坦，也不太崎岖，只是平缓地起伏，有许多树，覆盖着神奇的县公路网。它们为县里居民服务，路上车辆不多，而且方向直来直去，不是南北向就是东西向，两方向的公路有规则地交叉，大约一英里有一个十字路口。我的脚不方便使我更喜欢走光滑的铺好的路面，而

[1] 乔伊斯为现代派文学最著名的作家，其语言隐晦，几乎到难以理解的程度。——译者注



J·D·麦克奈特，1965 年

不喜欢沙石或草地或其他不平整的地面。安阿伯附近的县公路是我遇到的最好的散步道。我每 15 分钟走到一个十字路口，这么算我可以不停顿地走 12 或 14 英里。我的记录是一口气走了 26 英里，不过这次我停下来休息了几次。我的太太沿着选定的道路开车，路上我们碰到三四次，这时就休息几分钟，吸点西红柿汁。整个散步用了 7 小时。

另一件使安阿伯令人感到愉快的事是它有一个大的数学系，其中我能碰到几位同事，他们个人正好是我喜欢的，而且从专业上来讲也正好是我所需要的。我想我需要的是一位逻辑学家、一位分析专家、一位代数学家；如果此外周围还有，还有一些数学家，使我在一般（点集）拓扑学、同调代数学以及

范畴论原理等方面遇到麻烦时能够请教他们，那么我觉得我真处于良好状况。对于逻辑、分析和代数，我希望每个学科都有某位数学家，他能把我会的学科的那一部分放在一边，而能教导我其余某些部分。我的希望在芝加哥和密歇根都得到满足。在芝加哥，我的指导教师是弗兰克·鲍什（Frank Bausch）、欧文·塞加尔（Irving Segal）和欧文·卡普兰斯基（Irving Kaplansky），还有诺曼·汉密尔顿（Norman Hamilton）和桑德斯·麦克莱恩在周边外围。在密歇根，这个队伍有罗杰·林顿（Roger Lyndon），阿伦·希尔兹和杰克·麦克劳克林，我能在内场和外场都用到他们。

弗兰克·鲍什是学院领导成员之一。他开始在丘奇（Church）指导之下写博士论文，但始终没有完成。他很聪明，也是一位读起书来废寝忘食的人，同时具有惊人的记忆力。我从他那里学到很多东西。在我向他请教的时候，他还不是位物理学家，我总是从他那里学习调和分析和重数理论。我觉得从他那里学点东西并不容易。他总是不太理解为什么这么简单的问题我还是遇到麻烦。他的回答总是倾向于十分紧凑，但他总是知道我希望知道什么，这最后使他的回答切中要害。至于卡普兰斯基，他很了不起，我没什么可多说的。对于代数学，他过去知道的（和现在知道的）是我所能用到的十倍有余，而且，他还知道怎样把它们讲得容易接受。

诺尔曼·汉密尔顿，我在普林斯顿时就认识，在芝加哥做博士研究生，是安德烈·韦伊指导的少数哲学博士之一。作为数学的学习者和理解者，他可以归人天才一类，但是，他从来不发表任何论文。我一直纳闷，为什么不发表呢？他缺少什么品质呢？野心？耐心？锲而不舍的毅力？不管用什么词，它都是创造性的不可缺少的次要品质。一个赛跑选手必须要有腿，但



J·E·麦克劳克林，1963年

是，只有腿而没有视力（比如说），还不能使他成为一名冠军。数学家必须有天才，是的，但是，只有天才而没有组织它的意愿和能力就每时每刻除了空集之外什么也产生不出来。尽管可能这样，汉密尔顿仍然是我在芝加哥的支柱之一，我总希望他在我的身边我能依靠他。在我教一般拓扑学时，他一度是我的助教。我肯定从他那里学到这门课程的知识要比学生从我这里学到的还多。

对芝加哥的倒叙就到此为止。在密歇根，罗杰·林顿作为一位逻辑学家同时又是辩论专家很出名，他总是随时乐于助人。

我已经谈过阿伦·希尔兹和我们的两人讨论班。早在我到密歇根来之前，我已经认识他们两位，而且认为他们是我的朋友。至于杰克·麦克劳克林，我几乎不怎么认识，我们两人曾见过两次面，一次在美国数学会的会议上，一次在格论的学术讨论会上，但我们从来没有真正结识。我们成了同事之后，杰克一开始对我很不满，我到这里好像是个有权势的大人物，对我的任命也搞得有点大轰大嗡，他对所有这些大吵大闹的喧嚣表示怀疑。到头来，他成为我在密歇根的最要好的朋友，我离开后，他成为我最想念的人。

杰克是位工作勤奋、知识渊博的代数学家，但是，他写论文的那种代数学可并不是我所喜欢的那种。例如，在恶名昭彰的散在单群中他发现其中一种。我自己是工作卖力也有相当广泛知识的算子理论专家，而使我感兴趣的算子性质他则完全漠然视之。然而，还是有一部分数学我们两人都懂也都喜欢。那是一个小的学科，并不能看成很深奥。这学科据说没有什么内在的重要性，它仅仅是一个有用的工具，对其他学科来讲偶尔是例子的来源。我讲的这门学科就是线性代数学。杰克和我非常喜欢发现和分享关于矩阵的有趣难题。一旦我们发现我们在这方面有共同爱好，我们接着发现，我们在饮食、散步、音乐、文学等方面有共同的兴趣和品味，而且我们喜欢彼此相伴。杰克原谅我刚到密歇根那些年一开始的大吵大闹；任何人只要他能理解并喜欢约当（Jordan）标准型就不可能那么坏。

如何推荐

我在密歇根大学的生活是正常的学术生活——研究、教学、公职，以及由此产生的额外的日常杂务。

学术生活中最主要的杂务就是通讯。我们总是从学生，从找职业的人，从怪人，从同事以及他们的系主任和学院院长，从作者和他们的编辑以及他们的出版商，当然还有从政府机构收到询问各种信息的信。对于书信的分布函数总有点奇怪，我们全不能超出我们职业写信的份额写更多的信，但是我们全都似乎认为我们能写更多。随着经年累月抱怨我写信太多，我逐步制订几条基本规则加以执行，而且对于那些我下不了决心丢掉的信件把它们塞到许多文件柜中。为了说明我怎样通信，最好的办法就是制定规则和给大家看几封信。

我的规则一共3条：(1) 回答所有真诚善意的来信决不迟延，要迅速回信。(2) 不要用渲染的修辞，要平铺直叙。(3) 如果你已经讲完你需要说的话，马上打住。要简短。

下面我们依次稍加解释。

我不去定义什么是真诚善意的信，而是举出一些不是真诚善意的信的典型例子。在我的单子中，有4类高居榜首（我想我的意思是它们最不是真诚善意的）：(1) 彻头彻尾的怪人请求得到正式的承认。(2) 中学学生要求家教。(3) 被拒绝的奖学金申请人，没有学术的证明，通常来自国外，要求专业指导或经济资助。(4) 教育学院来的博士生，他们的信附有24页的问题单以征集统计的结果。对于所有这些情况，以及许多类似情形，我不仅不迅速回信，而且根本就不回信。

在数学存在的漫长岁月中，一直存在着数学怪人，他们是逗乐和烦恼的源泉。欧仁·威格纳(Eugene Wigner)[1]据说提出一个淘气的建议来对付他们。他建议，保持非常有礼貌而不去回信，而只是把他们的信互相寄送。"亲爱的甲先生：附在信中

---

[1] 威格纳(1902—1995)，匈裔美国著名数学物理学家，首先把群论用于量子力学，荣获1963年度诺贝尔物理学奖。——译者注

的是我最近收到的来自乙先生的来信，你可能对于其中的观点感兴趣……。”我听说，虽然这一招很聪明，但是行不通。甲先生和乙先生都可能反弹回来，要你继续通信。

在过去几十年中，我已经收到厚厚的一堆怪人的来信。他们中大多数人关注老难题（例如三等分一角和费尔马大定理）。我最喜欢的化圆为方者把他的问题写在一页半纸上。他声称他的技巧“能够解许多数学难题”，这我当然觉得挺好，他的主要定理是说

$$2\sqrt{\pi}=\frac{\pi}{2}+2,$$

这公式也让我开心。我化简这个方程，发现它只有一个重根，即4。这比大多数化圆为方者得出的数都强，通常那些人得出的π值都很讨厌，诸如3.14什么的。

问问题的高中学生都是他们的年级教室的大班老师给他们布置的一个课程作业。写一篇冯·诺伊曼的传记，什么是拓扑学，解释希尔伯特空间的意义和用处，这些是典型的例子。课题作业的要求之一就是让学生去访问专家，最好是亲自见面，或者电话采访，最坏也得通信。我的反应是，要把这位老师干掉难道也应该称为杀人。

拿博士之前和博士后的奖学金申请人是最可怜的一批人。有时他们写的英语花里胡哨，净是错误，声称只给你一个人寄信，把你捧到天上去，可是很明显他们会把同样的信寄给其他几十位数学家。有时，他们要求很高，就像做买卖。下面就是我不久之前收到的一个样本：

> 大量数学家建议我去询问任何“美国数学协会”的教授并要求他担任我的科学博士论文的指导教师。我的科学

博士论文题目已经定为"对核局部凸空间理论的一些贡献。"

请用英语表示你赞成接受为我的科学博士论文导师，请提供对上述课题的一份概要，上有你同意接受作为我的科学博士论文导师的正式签名，这样我可以做为博士生在其上签名。假如你不愿意接受，请你能够告诉我其他教授的姓名和地址，他们能够接受同样条件而且会寄来一份概要具有他的正式同意的签名，对此我将十分感谢。

不予回答——不对吗？

对于那类24页的问卷调查，我已经一份也找不到了。那些问卷实在太愚蠢无聊，让我十分生气，以致于我甚至连归档都不归，但是我猜想我们都见到过这样的例子。它们肆无忌惮地占用我们的时间和利用我们的忍耐力，甚至于在它们有些意义时也是如此，何况它们通常是毫无意义的。

什么是快速的回信？我提出一个定义：在0天与7天之间寄出回信。有许多信我收到的当天就回，大多数等一天之后，而所有回信毫无例外都在一周之内寄出。而对这个"毫无例外"的例外只出现在我出差在外的情况之下。而在这种情况下，迅速回信是指回家之后真正看到来信的7天之内。

有时真诚善意的来信和非真诚善意的来信之间差别不大。麻烦我的申请人所需要的帮助往往提得十分莽撞无礼，让人讨厌，但是也有时，他们是些敏感的，明白事理的人。万一我有一点点理由认为他们属于后者，自然我就会给他们回信，哪怕我所能说的只不过是我实在无能为力，帮不了什么忙。

下面是一封请求信的几个片断，它十分动人，以致我不能置之不理。

请您原谅我在没有任何事先的介绍的情况下冒昧地写信给您。(这种道歉有些不同寻常。而大多数写这类信的似乎都肯定别人欠他们什么——至少我欠了什么。)……

1963年，我获得数学专业的博士学位……(许多其他人早在他们达到这个阶段之前很久就写信来，有的甚至高兴地承认他们考博士生后考上。)

信中附上我已发表的论文目标……。(这是极不寻常的；这才是实实在在的，我们能够对之进行审查和评价的东西。)

是否能请您告诉我，我是否能有机会得到您宝贵的指引以及是否我能够为此获得某种奖学金或者教学工作。……我将尽我可能证明我是当之无愧的。

这位的论文主题并不是我所特别重视的，而且在经济上我对他一点忙也帮不上。他可能还给其他人写同样的信，但是，从来信内容来看，我想他最多给我们两三位写信。我对自己说，这就是那些认真想要成为数学家的人中的一位。我不能肯定他有多大天才。但是我的确感到，从数学上讲，他的品味不高。对我来讲，我的时间非常宝贵，我不想浪费一点点，但同时，我想从长期绝望的痛苦中解救他。下面就是我收到信的当天给他的回信的全部内容：

亲爱的N博士：

很抱歉。不！

诚挚的P·R·哈尔莫斯

顺便说一句，这还不是我曾写过的最短的信。许多年之后，作为编辑，我要求艾德·休伊特（Ed Hewitt）给一本书写篇书评。他的答复中有如下一段："你打算让我写多少页，照隔行打字算？我可以寄给你一篇书评，短得像电报或者长得让人讨厌。"我的答复的全部内容如下：

亲爱的艾德：
8页
你的保罗。

[又及：他从来没有写这篇书评。]

推荐信可能是我们全都不得不写的，最为经常要写的一种信件。我对写推荐信的理论有两条原则：(1) 总要讲真话，但有时并不是全部的真话。(2) 不管你想要说的优点有多少，你肯定也要讲点缺点。

如果一位谋职者要我同时推荐他应聘两个职务：一个在芝加哥大学，一个在迈阿密大学，我必定不会把同一封推荐信寄到两个地方。那样就是我所说的没有讲出全部真话的意思。问题是在于强调什么。甚至在芝加哥，假如关于一位谋职者的信，用很多话讲，"他是一位不好的教师，"并用图表细微地显示工商管理学院的学生如何成群地离开他教的微积分班，那么，一位认真负责的院长或者甚至系主任，可能会使用其他谋职者来保持系里的研究水平。显然，要告诉迈阿密的院长，谋职者的研究能力不够高以致在芝加哥还拿不到终身职位，几乎可以肯定它起着投反对票的效果。那么告诉芝加哥，"在研究方面，X和Y一样好，甚至更好，他正在改进他的教学，但仍然有一大段路要走"，同时告诉迈阿密"Z是位鼓舞人心的、受人欢迎的

教师，他几乎可以肯定在研究工作方面继续做出扎实和稳定的贡献。”

在讲优点时也谈一些缺点的目的是使你在读你的信的行政主管人员那儿建立起你的水准。为了传达信息必须要有对比。进行比较是最有用的（“X 比 Z 强，但是不像 Y 那么好”）；如果不能同别人进行比较，那么可以进行“自我比较”：“他对朗达(Ronda) 问题的解决是深刻的数学结果，但他关于立方根的论文使我感到就像粗制滥造的货色。”人无完人，这谁都懂；毫无瑕疵的称赞（或者它的反面）更容易引起人家怀疑而不是产生信任感。

下面是我的文件中的三个样品。

第一封是寄给普林斯顿高等研究院的。

> X 要求我为他给你们写封推荐信。他说，他计划明年休公假到研究院去。
>
> 我能讲些什么呢？他是位（他的学科的）稳健的，不那么引人注目的，不那么多产的研究者。他不会造成任何损害，他可能学到很多东西，几乎可以肯定他会做出一些工作。

下一封推荐信是他们要我填写的国家科学基金会的表格中平淡乏味的部分。

> Y 是位优秀的人才——他有思想、而且他做研究——他必须得到鼓励——我强烈推荐他获得资助。
>
> 这就是我的结论。我承认其合法证据并不令人信服。他实际上尚未发表论著，附在计划中对研究工作的叙述也写

得很糟——它几乎完全是废话。我听他讲过几次，也同他多次进行过私人谈话。他的谈话甚至比他的写作还要差。

但是在这种混乱的状况之下，他还是有丰富的思想。他在三次不同的情况下向我证明这点：他解决许多问题，极为困难的问题，这些问题我们中许多人都在积极地坚持不懈地进行研究。他的解是吓人的——它们都可以按照 10：1 的比例简化和缩短——但是他得到令人讨厌的解答，而其他人尽管作法漂亮但没有解决。

问题：像这样的家伙你能为他做什么？回答：给他所需要的支持，给他一个难题，然后站在一边来弄清楚他的解答。

我最后的样品是我写过的最强烈的推荐信的片断。日期是1949年，是为回复麻省理工学院的正式格式信函而写的。其中要求我评价各种品质，像能力、热情及个性。其对象是I·M·辛格。

辛格极为优秀。

能力 他在我们这里的全部生涯表明，他是我们最好的学生之一。而到现在，他还不止如此——他是位数学家。在去年一年中，我观察到他的见解的改变：由一个能在课程中得高分的学生到一个成熟的人的改变，这个成熟的人能够理解概念，能够消化许多数学，同时具有创造性观点。

热情和勤奋 我很少到埃克哈特大楼去而没有见到辛格在那里，他总是在那里同朋友们谈数学、工作、阅读、参加讨论班、做讨论班报告，而且一般来讲，就像那些二他们喜欢干的事一样干活。

教学能力 辛格作为讲师，讲课清晰、连贯而且具有耐心——我从来没有看到他窘迫不安。他曾担任两年助教。辛格辅导的课程的主讲教师，我的一些资深同事[例如，莱恩(Lane)]都对他的工作评价甚高。因为系里对于教微积分使用库朗的课本，而从格兰维尔(Granville)的书中选习题的方便做法不满意，因此最近决定选择我们最有能力的助教，给他布置一个学期的任务，为我们微积分的课程的第一第二学期准备一组适当的习题。我们选中的人中就有辛格。

个性 辛格是我认识的最好的人之一。他热情、愉快、迷人，是位优秀的篮球队员，也是位很差的牌友。

当然，我也可能搞错。我们不可能在仔细阅读他的至少六七篇论文之前，讲出某某人真正是哪一类数学家。但是我可以为辛格打赌。假如有10个像他那样的人我们来打赌的话，我确信我有9次会赢。

泰德·马丁(Ted Martin)在下一次见到我时，拿我这封信开玩笑。他说，"什么，真的吗？你不觉得你让那位给迷住了吗？没人真那么棒！"泰德最终还是错误了；正如其后历史所证明的，辛格真那么棒！

怎样提建议

职业通信中有不少涉及提出建议的意见，这些意见和建议有的是有人来征求，有的不是，意见有的被采纳也有的不被采纳。

凯利(Kelley)的《一般拓扑学》于1955年出版。凯利和

我已经是多年的老朋友了。他让我看他所写的各种手稿，有两次，凯利鼓动我写信给他，给他提些他并没有征求的意见。这两次的主题都是关于名词术语的，而名词术语问题是我一直关心和重视的。

下面是我在1953年3月写的。

> 关于半度量还是伪度量，我极为赞成使用后者。我反对使用概念和名词术语去指那些不存在的结构。例如，我反对某些古典分析学家谈到“(x，y，z)空间”的倾向。他们讲，他们有一个空间以及他们用（x，y，z）表示该空间中一点，这到底是什么意思。他们所做的只不过是给这个空间取一个复杂而丑恶的名称。而且顺便把3个十分好的字母固定下来，或者至少把3个字母的十分好的组合固定下来。“半度量”也不是那么坏，但是它不好在于“半”的意思是“二分之一”，暗示数字2。我认为用“半”是合理的，只有在能够看到某种二元性的暗示时才对，例如，用在半连续函数上。

在凯利写他的拓扑学时，我正在研究代数的逻辑。这两个学科并非完全互不相关。拓扑可以用闭包算子的词来定义，而这个概念的特征代数性质已经被某些逻辑学家抽象出来加以研究。我的单演（monadic）代数，它是由量词算子∃和∀的激发而产生的，它就包含闭包代数为其具有某种极端性质的特殊情形，而闭包代数则是由拓扑的激发产生的。正是这两种结构的关系推动我在第一封信寄出9个月之后给凯利写第二封关于名词术语的信。

> 给这本拓扑学著作的作者一个名词术语的意见。一个集合具有两种极端的拓扑。每个人都同意最大的拓扑应该称为“离散的”，但是对于最小的拓扑，大家并没有一致意见如何命名。[有些轻率的(indiscreet)人使用**一体的**(indiscrete)这词。][①]对于每一个拓扑空间都伴有一个闭包代数，即空间中的所有子集的类，其上赋予布尔运算的闭包算子。闭包代数是相当好的代数对象，具有一种明显的理想理论。与一个固定集合的拓扑相伴的各闭包代数中，只有一个在通常代数意义下是**单的**，即它没有非平凡的理想。这种拓扑就是还没有命名的最小拓扑，也就是只有两个开集的拓扑。由此我们被迫得出结论：那种小拓扑应该称之为被赋予拓扑的集合的单拓扑。

凯利采用了“伪度量”这词（他只在索引中提到“半度量”)，但是他坚持用“一体的”（或“平凡的”)，而不用我经过令人信服论证的“单的”。有所得必有所失。

大约20年之后，海达尔·拉甲维（Heydar Radjavi）和彼得·罗森塔尔(Peter Rosenthal)正在写他们关于不变子空间的书时，我写信给彼得。

> 这封信是作为编辑的我写给作为作者的你的。
>
> 你现在是位事业有成的数学家，远不是在我的影响下的学生，如果我对你的名词术语方面的某一决定不同意的话，那一定是让我受不了的。这就是为什么当你提到所谓

① indiscreet 和 indiscrete 读音相同，作者此处表达他的讥讽之意。由于 discrete 通常译离散，用于拓扑似不太好，译“分立”较准，这样 indiscrete 可以译成非分立。在通常情况下，离散的对立面是连续。——译者注

的“埃尔米特”代数之类的东西，后来又写些关于它们的论文时，我仍然保持平静。不过，现在你想要把它们写进你的书里去（我不能肯定你会），我就得说话了。

这词干脆就非常让人讨厌，彼得，如果它只是论文本身的问题，我敢肯定它很快就会无声无息地死去。但是，你们的书在未来许多年内将是一本标准参考书，因此，在你们写时应尽可能把它写得接近完美。

你对埃尔米特代数和自伴代数进行区别。这里有两个概念，但是谁又能记得随便选择的同义名词呢？除了埃尔米特算子碰巧在许多其他性质之中具有一个微不足道的小性质之外，埃尔米特代数究竟埃尔米特在哪里？

请你务必彻底换掉这个词，在世界这个角落里建立起健康的名词术语。我有一个建议。当一个代数（或一个单独算子）具有性质：每个不变子空间是约化的，它有什么表现？答案是：它趋向于使事物约化。在英语中，什么是完成这种趋势的词尾变化？答案是“ive”。问题的解：一个可约的（REDUCTIVE）代数（或算子）是每个不变子空间可约化的代数（或算子）。

这次我赢了。海达尔和彼得同意我的意见。“可约算子”和“可约代数”现在成为算子理论中的标准名词术语。纯粹代数学家使用的“约化”和“可约的”有不同的含义，但那是他们的问题。

还有许多不同类型的建议和意见，其中包括商业上的征求意见。这里是一个样本，这是一家出版社有一次要我评价一份手稿时，我寄给他们的报告。

数学的表达很漂亮，文笔清楚，干净利落。作者对于用英语论述可以说运用得不同寻常地好（虽然不总是十分完美）。组织上仍然多少是严酷的那种：定理-证明-定理-证明，让人没有一刻喘息。

这本书显然不是给大学生写的。作者要求读者已经掌握像康托尔集合以及完备度量空间之类的东西，他还设想读者能很快接受像集体的 σ 代数之类的抽象概念。不管是概念还是结果在引起之前都没有讲述引人的动机。

书中只有极少数的例子，真是令人遗憾。每章末尾的练习很好，但其中大多数都很难，使得学生去思考（当然这是好事），只有少数练习具有例证的说明作用。除此之外，练习常常已经做完或接近完成，因此实际上它们只是正文的补充。论述得甚至比通常更为轻快。

书中的思想和技巧都不是新的，同样，组织和编排的方法也不是新的。这些都十分令人满意。作者也没有声称他有创新之处。

总之，本书是对标准题材的非常好的紧凑论述。它的主要优点（以及主要缺点）是过于简略。几乎可以肯定它没有广大的市场，但是十分有可能找到买主。做为猜想，我推测在三四年内可以卖出 5000 册。

开发这本书还有一种有趣的可能性：进一步压缩这本书，删去重复的部分，或者删去第 7 章，这样使小成为这本书的优点。做广告宣传时，可强调其他数学分支的专家可以买这本书，书可以放在口袋里，乘地铁时可以从中学到所有测度和积分知识，而这在将来是永远有用的。

我在这里要举出的建议的最后一个样本是我对一位研究生

院院长的答复，他寄给我一份长长的详尽的提案让我进行评估。这项计划是要在他的学院中开始一项培养数学博士的方案。这项提案附带许多文件，例如目录，课程的清单以及简历。这个学院的数学系并没有研究方面的声誉和传统可以做为这项雄心勃勃计划的基础。当时是1969年，不景气的70年代正在地平线上隐约可见。

这项提案从整体上讲写得非常之好，它没有通常行政当局许多那种含糊其词的话。它只是清楚而简洁地讲出必须讲出的话。大多数细节都经过仔细的斟酌推敲过。

有些说法我不同意。开门见山头一句话就是如此。我对于提议的计划“毫无疑问”对国家有用以及“安置毕业的博士没有问题”深表怀疑。我不能声称我了解写这句话的作者所不了解的所有事情，但是我或许能给这些事情以一种完全不同的理解。我们的国家在生产数学的博士方面比率已经达到饱和，这是一个站得住脚的论点。可能不论是国家还是提议计划的个别产品都不能由于计划的实现而受益。

提案所清楚预见到的困难（争取上好的博士的竞争以及缺乏好学生的适当供应）都是实实在在的。这些困难可能是不能克服的也是一条站得住脚的论点。

上面两段表明这样的理由，即为什么建立培养数学博士的计划未必是一个好主意。让我接着谈谈关于这项计划将以某种方式建立起来的设想，并简短地对一些细节进行讨论。

我强烈赞成这种说法，即对于“传统”数学的可靠的基础训练是正确的出发点。建议中对当前院系状况的关注

与此有关，而且令人焦虑不安。一个有 182 种期刊的图书馆会是很不错的，只要其过去的资料伸展到过去一个相当长的时期（至少 20 年）。一般认为，领先的供研究用图书馆至少也得有 200 种到 300 种必不可少的期刊。专著的数目（5000 种）实在是太少了，为了能有效地进行研究生教学和研究，必需要有这个数的四五倍。

所提出的博士生的课程表比芝加哥大学对硕士生的要求更广博——但多得不多。所缺少的是一组给二年级和三年级研究生上的研究水平的课程。

所提出的程序（课程、考试、指导论文）对于常用的主题并没有什么人的变奏。可能有一些细节将会被发现是不令人满意或不可行的，但那算不了什么，委员会用几百人时也不能解决问题。(括号中有一短句所提出的思想对我来说是新的，我急于称赞它：让研究生在研究生课程中充当"客座讲师"是一个绝妙的观念。

在根据建议中所给出的统计数据的基础上很难对院系得出什么结论，但是我不得不给出一个结论。其上列出 20 位，我猜想其中最多只有四五位（主要是年轻人）用来培养哲学博士的人值得一提。

那么，下一步应该干什么？我倾向于讲：放弃掉。让数学系（如果它不满意它当前的位置的话）干它过去一直在干的事，争取干出最佳业绩，而不是去干另外一些事。我不预想能很顺利很容易就能把博士生计划建立起来，并能取得快速和惊人的扩展，以及长年的成功运作。许多博士生培养计划就像小企业一样注定要失败而不能取得成功。这是根据我所了解的事实而有的观点。如果这使你们积极而雄心勃勃的年轻数学家感到失望的话，我觉得真是非常

遗憾。我希望他们一切顺利。假如我的观点要是被证明是错误的话，我会十分高兴。

这个博士生计划没有能建立起来。

虽然我能飞快地浏览文件，很快地找到其中的要点。但是，即使这样，看过一遍这位院长寄给我的材料也用了我 4 个小时，外加一两个小时来编写这份报告。它完全是一件没有人感谢的徒劳的工作，而且是实实在在的白干。我花费那么多时间毫无报偿，也没人因为我的工作向我致谢。想到这里，我总会感到一阵酸楚。经验会让我做出决定，将来要再干这类工作只在严格的合同基础上进行。工作任务、时间和报酬都应该事先讲清楚，劳动者也应得到他应得的报偿。

噢，好了，你不可能总是走运、事事成功。

火奴鲁鲁，我来了！

1968 年，我被聘担任夏威夷大学数学系主任职务。这并不是说，我正坐在家中干自己的事时，突然来份电报提出聘任。几个月之前我就知道这件事，其间进行过一系列思考和一系列谈判。

那些年，我已达到适当的年龄和适当的身份（它们既不太高，也不太低），可以站在系主任职务的行列之中。在我 50 多岁时，我想我大约收到过十几次各色各样建议我就任系主任职务的意图和提议。我记得最清楚的有来自下面这些大学的聘任意向：艾奥瓦大学（1967 年），匹兹堡大学（1968 年和 1969 年），马里兰大学（1968 年），卡尔加里大学（1972 年）以及来自夏威夷大学和得克萨斯大学坚定的邀请（1968 年），还有马萨

诸塞大学（1975 年）。

我对夏威夷略知一二。我有一位哥哥是眼科专家，他在 30 年代就移居夏威夷，并从那时起就居住在那里。艾德·莫欧金尼（Ed Mookini）是我在 40 年代教过的芝加哥的一名学生，他出生在夏威夷，父亲是夏威夷人，母亲是日本人，我知道的夏威夷的事大都是听他说的。（如果你要发出他的姓的音，必须读出两个 O 来，这样使得他的姓有 4 个音节或者 3 个半音节：Mo-oh-ki-ni。）我曾在 1967 年访问过夏威夷，在大学呆了 -个学期，教了--门课，并且爱上这个极乐世界。

回到密歇根之后，我开始思考。"看哪，哈尔莫斯"我对自己说，"你已经是过 50 岁的人了，即便你还能做研究的日子还没有结束，那肯定也为期不远了，而且到时候你就不得不退休。为什么现在不移居夏威夷，到那时候你就可以呆在那里了。"这还不是我讲的全部。我翻来覆去地去论证，我对自己讲，我会成为一位好系主任。我知道需要干什么事，我说；我办事有条有理，我急于辛勤工作。我说，这是一个花大钱干大事的时代（我怎么会知道，我说话时已经几乎是黄金时代的终结?），再加上夏威夷迷人的自然风光，我肯定能够在太平洋中部建立起一个好的数学中心。

我还对去夏威夷是非常明智之举给出另一个巧妙的证明：有 50 万人住在夏威夷，只要其中有千分之一的人有某种数学天才和兴趣，而只要其中再有十分之--到夏威夷大学学数学，我的时间和精力就没白费。这表明一厢情愿的思想如果不去考查所有的事实会得出多么荒唐的结果。肯定岛上有聪明人，而且十分可能，我对有数学才能和兴趣的人的估计低于实际的数字。但是，我所不了解的是夏威夷大学的名声和吸引力在夏威夷并不高——显然，加州具有优势地位和荣耀。任何有能力的学生



E·莫欧金尼，1965 年

就会去伯克利或者洛杉矶，假如他能负担得起的话，要是他负担不起，或许他可以借钱去，而真正优秀的学生还能拿到奖学金帮助他们去。我的“证明”完全是根据一个不完全的公理系统作出的。

1967 年秋天，生活是相当错综复杂的。夏威夷想要我，马里兰想要我（事情已经进行到这样一个阶段，所有细节包括薪金全都由院长商定同意，但因为大学校长否决薪金，会谈最终破裂），得克萨斯也要我。得克萨斯是指得克萨斯大学奥斯汀分校，我谈判的对象是约翰·席尔伯（John Silber），他由于转到波士顿大学，并开始铁腕的治理，从而获得国内的大名声。

我同夏威夷大学的谈判开始时，艾德·莫欧金尼是夏威尼大学的系主任。他的任期行将届满，他和陶德·弗尔尼斯（Todd

Furniss)（院长）都急于要使夏威夷大学在数学上引人注目。弗尔尼斯收到关于我的信显然令他满意。谈判花费时间因为这种事情总是如此：我们必须讨论拟议中数学系的新的规模，对于教学任务、薪金、开会补助、教室、办公室以及诸如此类几十项其他细节协商一致，而且尽管打过大量的越洋电话，我们仍然还得把所有事情记录在案，然后把这些书面材料寄来寄去。

约翰·席尔伯和我在他的办公室中有一次面对面的长时间的谈话，还有两次电话上长时间交谈，然后以一种十分精确的行政管理的方式详细地写下来寄给对方。我给他最长的信共有5页而且不是隔行打的，其中讨论25点内容。他的复信压缩到3项，他哄骗道“……我就不谈你的（前）12点，让我们只是说……”，通过像这类职业接触你能了解一个人有多少？或许还不够，但是我对他的了解使我对约翰·席尔伯又喜欢又佩服。他过去是位哲学家，十分聪明，对于字里行间隐含的意思很敏感。他有幽默感，他了解学术界，他非常严格——他是位专横的行政管理者。

陶德·弗尔尼斯的个性完全不一样。席尔伯能够在一家难卖的二手车商店谋生；弗尔尼斯则是举止高雅的绅士，可能在外交或者经营房地产业更在行。他总是诚心诚意地对待我，十分友好，他真心希望我来。他不喜欢充当坏消息的报信者，但有时他也不得不如此。他不愿意告诉我，夏威夷大学校长托姆·汉密尔顿（Tom Hamilton）已经辞职，而我的正式邀请信上是他签的名，他可能会在我到达之前已经离去。（难道我是汉密尔顿的救命稻草？）很久之后，我们已经在校园里一起散步好几个月了，他都不想告诉我，他正要离开，他已经接受了华盛顿的美国教育委员会的职务。但是，尽管他有许多优秀品质，他总有一种似乎不值得信任的圆滑态度使我一直感到不能完全的



W·T·弗尔尼斯，1965年

自由自在，无拘无束；在这方面，我更喜欢约翰·席尔伯直来直去的真诚。

那年年末，报纸上登载一篇新闻特写，报告美国一项最近统计研究的最突出的部分。其中讲，美国生活费最高的地方是火奴鲁鲁，而生活费最低的地方是得克萨斯州的奥斯汀。当时，两份聘书都在我的手中：一份来自火奴鲁鲁，一份来自奥斯汀。从经济上讲，火奴鲁鲁的待遇还不错，但并不突出；而奥斯汀的待遇则要优厚得多。

那我为什么要接受火奴鲁鲁的聘请呢？我不敢肯定我在当时知道答案，我敢肯定的只是我现在不知道为什么。下面是我当时给安布洛斯写的信。



J·R·希尔伯，1965年

气候——是的，气候有很大的关系。我在这种非人道的冷天气中受罪，这里的昏暗、黑暗、阴湿使我感到压抑。夏威夷不仅仅是不太坏，而且它简直是气候宜人。太阳无时无刻不在普照大地，天空诗意般的湛蓝，沙滩是金色的，花朵竞相开放。在这种环境中吸入花的香气，我的灵魂就像听到莫扎特四重奏一样奔放。

气候不是唯一的理由，我真的想当系主任——至少当一阵



L·J·沃仑，1968 年

子。我喜欢这种想法，去当一个小凯撒，把我一些行政管理理论付诸实践，只是为了给我自己证明，这一套能行得通。其次，由于我做为系主任工作很忙，这也给我一个籍口来说明我为什么没有生产出高质量和数量大的数学论文，而我的良心总不断提醒我应该生产出来。不管怎样，人间乐园获胜，我兴高采烈地大叫："火奴鲁鲁，我来了！"

当我告诉希尔伯我的决定时，他说他不打算放弃。他继续斯望我能去得克萨斯，一年之后，也许两年之后。

1968 年 1 月 8 日星期一晚上，我打电话给陶德·弗尔尼斯，表示我接受夏威夷的系主任职务。我的客厅窗户外温度为

−19.5℃。下一周我给阿伦·席尔兹和拉里·沃仑（Larry Wallen）安排工作。这使阿仑考虑了两个月。我同夏威夷通过几次电话，使得聘任条件有所改善，但并不太多，他只接受一个学期的访问。拉里只用了一个月就做出决定。在一个寒冷而多雪的2月晚上，我的门铃响了，门口站着拉里，他闷闷不乐地瞪着我。他说"好了！我跟你走。"我们喝一两杯啤酒来庆祝。这是16年前的事了。拉里·沃仑现在仍在夏威夷，他是数学系的支柱之一。

我割断同安阿伯的所有联系，除了一种联系，那就是官方的联系。数学系和我都觉得最好把我的离去不叫辞职，而叫请长假。从系里的角度看，在他们找我的替补时，预算表上有我的名字可以使它保持连续性。从我的角度看，好了，为什么不呢……以防万一……。

第十五章　服务工作，各式各样

民主到荒谬的程度

系主任应该怎样选出来？许多大学，或许大多数大学，10个人或100个人的数学系通过选举选出他们的系主任。同时，大学的规章制度或者传统习惯规定，系主任不是选举出来的而是由院长任命的。这种矛盾通过一种合法的虚构形式来解决：系里告诉院长他们投票的结果，然后院长经过深思熟虑后，就任命他们选出的人。理论上，他可以任命任何其他人，而实际上他可不敢。

选举意味着民主，它们是按照近代的自决精神进行的。我个人似乎属于极少数反对在学术界使用这种民主方法的人。大多数人对我们认为民主不总是行得通的意见十分气愤，而他们占压倒大多数的反对使我不安。它只是使我极为不安，但是，它并不能使我信服。我知道我也可能不对，但是我的经验和我的判断告诉我我是对的，但是我也希望我也属于大多数人一边。我坚持我的信念。有些人声称我的观点很反动，意思是它是过去实施的那一套；而我则相信它有内在的好处，到将来也能行得通。

安德烈·韦伊的对数定律(第一流的人选出第一流的人,但是第二流的人则选出第三流的人）也一样成立，不管投票是涉及教师队伍少许增加，还是把一位同事提升到领导岗位。也可能哈佛和芝加哥足够棒以致他们在选举中不可能出很大差错，但是大多数地方就不保险了。他们选出的系主任可能是因为他人缘好（“他能同别人相处得很好……你知道，这点是非常重要的”)，或者因为他巧妙的竞选许诺（“你们不是认为，在决定薪金时，认为研究工作的比重超过教学是一种不公平的精英主义吗?”)。人们总在谈论专业知识、智慧和献身精神，但似乎他们在大多数情形下并不经常把票投给这些品质。

我赞成系主任由行政当局任命。我会听到我的同事们的吼叫：不！不！院长根本不称职，我们根本不能相信对我们这一行什么也不懂的人的判断，我们肯定能给我们选一个领导比外行选的强！我对这些吼叫有同感。院长有时的确不称职，他们要是能够懂得更多的话，他们的选择的确会有改进。但是，我还是相信，说到底，出于好意的偏颇还是要比有充分信息的自我利益更好。

系一级的选举总是倾向于产生二流的领导。的确，选出来的系主任不太可能是最差的，他不会把系搅得一团糟。但是，他们几乎可以肯定是些妥协能手、他们既不能够指出通往卓越之路，甚至于也不能维持它。从另一方面讲，如此一个系退化为普遍的平庸，那么选任何一位系里成员当系主任就都可能使这种低下的品质得以延续，到那时就无药可救，除非通过行政的干预任命一位充满活力的外来者。

我的一生曾同15位系主任共过事，其中11位是任命的，而4位是选举出来的。有13位的水平从中等到卓越，另外两个则极差。这两人都是选举出来的，他们都是办事拖拉、缺乏条理，

工作没有效率。到他们任期快满时，他们也都落得应得的不得人心的下场。

出于好意的偏颇还不足以选出好的系主任：行动必须基于知识，而知识则需要时间来获取。院长认识其他大学的院长和系主任，一位认真负责的院长在做出重要的内部任命之前，必须要咨询这个外部网络。认真负责的院长使用的另外一个技巧是征求系里每位成员的意见，最好是私下面对面会谈，或者也可以书面征求意见。如果系里有40位成员，用这种办法可能要用掉院长40小时的时间，但是这很值得。它实际上等于一个更细致的投票程序，比通常投票那种简单的数字结果（22票支持斯密司，14票支持琼斯，4票支持罗滨逊）有远远多的信息。它相当于一种加权的投票程序，需要院长开动脑筋，运用智慧。如果这些会谈使院长相信，支持斯密司的22个中，11人是有偏见的，或出于谋取私利，或者是判断力很差的二流人物，或者根本上无动于衷，他们投斯密司的票完全是因为斯密司要他们这么做，那么他就可以选择琼斯而不选斯密司。两年之后，他就会得到每个人的尊敬和感谢。

在选择系主任时，以及在管理像数学系这种科教部门中打算采取新的步骤时，绝对必要的是，让每一个成员都发表意见，并予以倾听。我不知道有40名工人的机器厂应该如何运行（十分可能以同样方式）。但是我知道，在一个重要的，必需进行合作的学术事业中，同事共享权力是必不可少的。一位系主任，一旦在任，不应该只埋头干他的事而不去不断地征求他同事的意见和建议。最终决策的责任当然得由他负（把它刷成蓝色不是绿色，要统计学不要模糊集合，雇用她而解雇他），但智慧来自集体。最坏的是，做出所有决策都只是靠计数，多少人赞成，多少人反对，而完全不做普查则更坏（也更危险）。没有人能什么

都知道，正如格言所说，两个脑袋总比一个强。

是否40个脑袋比两个脑袋强？是否7个脑袋比3个强？完全的民主要求对每一个问题进行投票。也有许多系试图在一个脑袋和40个脑袋之间取得妥协（就像求几何均值）：把思考和职责授权给一个委员会（或者两个委员会或者11个委员会）。拿破仑说过，比一个坏将军还坏的事是有两个好将军。我同意：一个坏的系主任不会比一个委员会能把一个系搞得更糟，哪怕这个委员会是由充满良好意愿的能干的人组成的。

在密歇根，我一度曾在执行委员会任职。当泰德·马丁开始考虑不再担任麻省理工学院的系主任职务时，易茨·辛格（Yitz Singer）写信给我问我密歇根的委员会是如何运作的。下面是我给他的答复。

亲爱的易茨：

请你在看这封信之前，之后或看信过程中把这封信烧掉。

密歇根有一个执行委员会。其成员包括系主任（当然委员），副系主任（同样也是当然委员），4位资深人士（任期三年），1位资浅人士（任期一年）。他们的选举办法如下。系里每年对每个空缺名额提名两名或多名候选人。然后进行一次选举，对于每个空缺，选掉所有的候选人只留下两位。最后，谁来填补这个空缺由系主任在这两人中选取——在所有已知的情况下，他只是选择得票多的那位。

委员会平均每周开会一次——星期五从3时到6时。在秋末，开会的次数往往更加频繁，而其他季节，开会次数可能较少。**理论上**，所有权力归于系主任，委员会只是咨询机构；而实际上，所有主要决定都由委员会做出。例

子：系里一位马屁精（并非委员会成员）选择教室，制定课程表，但是委员会必须予以通过。例子：委员会讨论所有改变讲师的申请（事先决定任期并制定通知海报），选择优胜者。委员会决定所有聘任事项（除了研究生助教），从讲师一直到正教授。委员会审定每个人的薪金，决定其精确增长额度，决定晋升，等等。

当然，系主任有很多权力，如果他行使的话。开会时他当主席，能引导讨论的进行，他能影响投票，而且由他向院长汇报并传达系里的建议和意见。他任期 5 年，可以连任。

这种体制怎么运行？真可怕！它就是用来造成可怕的状况：没有想像力，没有领导，二流的任命，拖延和耽误，议而不决。我个人宁愿要个法西斯。一位好的法西斯（马歇尔·斯通）能够创造奇迹，一个坏的法西斯（我将不提他的名字）能够造成严重破坏，我在两个人手底下都干过。如果一个家伙他的主要缺点是不能摇晃委员会这只小船，那他就什么也做不成。我不知道，从麻省理工学院的小人物的观点看，马丁干得怎么样，但是从外界观点看，马丁干得非常好。麻省理工学院有许多优秀人才，配得上它的好名声。我在此地不好讲密歇根的名声怎么样，但是这些年不能说太高。这只小船没有摇晃起来。

你还在看这封信吗？你还没把它烧掉吗？

我相信世界上的事都是人干的，而不是委员会干的。苏格拉底大师不是个委员会，发明家和数学家阿基米德也不是。在行政管理和金融业务以及在科学和人文学方面实现巨大跨越的

都是人而不是委员会，林肯、罗特希尔德[1]、牛顿、歌德等人就是证明。

甚至于在平淡无奇的日常工作中，委员会的决策也是可疑的。有些大学中设有“招聘”委员会，其成员都被认为能尽量干好工作，通过招聘合适人才改进系的水平。这就是我对这项工作的看法，但这并不总是他们的看法。他们把他们自己看成有个选区：拓扑学家就要聘另一位拓扑学家，分析学家要聘分析学家。表面上对资格和平衡争论不休，但实际上总是把建立帝国放在第一位。在这种实用政治里换马的妥协方案中，科学的判断难操胜券。

提高质量的理想办法是使好上加好，而委员会的办法则是削平山峰填平沟坑。这里值得注意的是填平政策的一种最终表现。现在大家通常坚持，系主任任期不应太长。他们论证道，最好的办法是让他们不要获得国王般的权力，3年是一个常见的任期，两年任期也不少见，甚至任期1年有时也行。我觉得这真可怕，这肯定不是提高质量的好方法。

我认为，至少得干上1年才能学会怎样当系主任。因此3年任期就意味，每隔3年系里就由一位摸索着前进的初学者来领导。况且，系主任在他最后1年任期里就被看成跛脚鸭，因此，他的3年任期实际上只有1年能够有效地运作。

在芝加哥大学，根据不成文的传统，三年任期对于斯通、麦克莱恩和艾伯特（Albert）以及他们的某些接班人来说，变成了6年，而这证明是很好的任职期限。6年不至于使系主任在数学上垮掉，但是却能够使他除了只实施短期计划之外还能干许多别的事。

---

[1] 罗特希尔德，犹太著名金融家，从18世纪下半叶到19世纪，他的家族对欧洲经济产生巨大影响。——译者注

伯克利的G·C·埃万斯（G. C. Evans）、密歇根的T·H·希尔德布兰特（T. H. Hildebrandt）以及W·T·马丁是三位伟大的系主任。肯定地，他们有些同事会对他们抱怨。他们的确有时不公正，独断专行，甚至犯错误。我不记得他们每位究竟干了多久，但我肯定知道，他们每位都不少于15年，我相信他们都接近20年。于是，他们建成了3个伟大的数学系。

怎样当系主任

系主任同时是翻阅文件者，礼宾官员，还是一位政策制订者。

系主任应该认真对待他的系里各项运作的每一细节。马歇尔·斯通，除了证明他关于西群和布尔代数的著名定理以及斯通-外尔斯特拉斯逼近定理和斯通-切赫（Cech）紧化定理之外，还把一个垮掉的系重建成世界最好的数学系之一，而且他还曾把粉笔放到教室中去以及打扫大楼。（在我的记忆中，只有两次在工友离开时有必要去干这种琐事：一次是整整一周温度降到接近零下30℃，还有一次是支持其他工会进行声援罢工。）在波赫纳（Bochner）任赖斯大学系主任时，我曾见到他视察系里公告牌，并去掉上面过时的告示。

分工和权力代表制都是好东西，但是我仍然认为，系主任应该亲自负起责来使得系里的所有工作都正常进行。工作各式各样，从没有受过训练的接线生接答电话到著名的教授安排学术讨论会，但是系主任必须认为自己应对所有事情负责。系里可能有十几位秘书，还有办公室主任是他们的顶头上司。一年也可能有20几次讨论会。为使讨论会顺利召开，需要会议委员会进行大量通信并张贴许多告示——不论怎样，假如什么事出

了差错，系主任应该知道，而且应该负责予以纠正。

有些系主任不赞成。他们可能讲，“我还有远为重要的事要费心，我特别要保证下个秋季学期能够请到适当的人来教偏微分方程，而不想去管两个讨论会是否冲突，这事你得去问吉姆。还有，除此之外，我还得研究我自己的数学。那些小事，那怕它涉及某些人，也会浪费我太多时间，太不值得了。”对这种说法我深有同感，但是我不赞成。的确，好教师的聘任要比安排坏的讨论班的时间表重要得多。许多人甚至把暂时放弃他们自己的专业工作看成一种巨大的牺牲。同样，如果系主任不能花时间在整个工作上，那就不应该接受这项工作。

系主任应该对过道里发生的事睁大眼睛，竖起耳朵：他应该知道谁同谁关系不错，谁的办公室明年春天需要装修。系主任召开系里的会议，而且在会议上担任主席。他必须及时召开会议以符合主要的行政管理机构规定的期限。他必须具有足够的个人权威以及愉快地和有效地运行国会程序的知识。系主任是面对大学内外的系的活生生的具体专业代表。因此，他必须保持许多外交上的接触，例如通过迅速和有礼貌的回信。

没有人能在一个荒漠的孤岛上从事数学研究，哪怕只是很短一段时光；数学研究是一个合作的、协同的活动。因为系主任一个最活生生的功能就是在系里培育和鼓励彼此的接触，各种各样的接触，其中包括下午饮咖啡的休息时间以及秋季和春季的野餐会，它还包括第一学期开始的相识聚会、以及期末召开的圣诞节聚会，还有一起开车去参加美国数学会冬季会议。举办这些活动的系比起不举办这些活动的系来说，可能会有更高的士气，也会有更高的专业水准。

我从经验中得知，如果一个系有举办这类活动的传统，这些活动就会给它带来许多好处。这些活动几乎受到普遍欢迎。但

是这些活动在没有支持的情况下就不能有足够的动力坚持下去，因此就需要有位系主任不断地支持和激励。系主任的工作就要提供永久性的咖啡壶，系里可围绕它度过休息时间，互相发发牢骚，释放掉灰心失望的情绪，重新鼓起干劲来。（咖啡本身只不过是个象征，你干别的事时不一定非得喝它。）同样，尽可能每天和同事们一起用午餐也是系主任的工作，系主任的责任。系主任的工作还有，鼓励（促使、帮助）学生们组织数学俱乐部，职业的或个人的聚会通常也同这种组织的活动结合在一起进行。甚至晚上也不是系主任自己的，他应该把款待系里成员以及来访问的客人当成自己的义务，而这种机会一年里总是不断。

最后我就要谈系主任最明显的也显然是最重要的任务，也就是人事和学术业务方面的事情。“人事”包括聘任、解雇、薪金及晋升等方面的问题；“学术业务”包括各种决策，例如，图书馆方面的，以及“数学科学”的哪些分支学科应该在系里发展，哪些科目应列入课程表，它们应该什么时候教，长期教还是偶尔教，由谁来教。

系主任必须是一位有眼光的数学家，完全熟悉数学共同体的情况，知道它们如何运作。有些系主任坐等人家来申请工作；而另一些系主任走出去征求贤士。（斯通常常说这类的话：“让我们注意那个年轻人，两三年后他可能准备好到芝加哥来。”有的系主任追求最佳人选；而另一些人是“现实主义者”，还没开始就放弃了。他们说“给他提供职位没什么好处，对于我们来说，他过于优秀了。我们只是浪费时间，最终会使所有其他人都拒绝。更现实的是降低我们的眼光，首先邀请一些同我们自己水平差不多的人。”这种态度实在太短视。我觉得，从长期来看，势必降低质量。有一次降低我们眼光的说法产生了适得其

反的结果，我就忍不住感到高兴。某位系主任讲："我们有机会得到A和B，但是X太好了。让我们代之以征求A、B和C。"幸运的是，系里没有同意这么办。他们投票同意A、B和X。结果：A、B拒绝了聘任，但X接受了。

图书室是数学家的实验室。教师和他的学生，做研究的数学家和他的学生必须有好的数学图书室，好到大学能够承受的程度，他们能够在大楼内走不远就到。现在首先看到事实和证明，其他问题非常可能在午餐前提出，另外一些问题在午后的讨论会提出。历史学家可能继续工作而不必马上验证重要的参考文献——可以等到明天。而对于一位数学家，所研究的智力建筑每一步都密切关连到以前各步，中间漏掉一步就完全使进展受阻。这时如果你必须穿上大衣，走10分钟到中央科学图书馆就太令人失望而且没有效率，不管是数学还是科学发现就都没办法了。是否你把化学家的实验室放到离他办公室要走10分钟的路才到的地方？是否你强迫他每天有两三次浪费20分钟在路上？

一旦数学图书室建在数学大楼里面，数学系在系主任的领导下还要决定其中要收藏什么书刊。答案通常并不难得出：所有书刊。甚至于在以前那种数学书很少而图书室预算相对宽裕的时代，"所有书刊"这词也需要十分小心地定义。它从来也不包括所有大学一年级的代数书和三角书，往往也不包括美国数学会讨论会蓝皮丛书中的每一卷。在这两个极端之间，必须做出判定。

要打算使图书室成为学术性的显然它必须代表每一数学分支学科，而不管这学科是否是当前时髦的热门，也不管这分支现在有没有系里的成员对它感兴趣。为了方便而排除某些学科，只去订系里成员眼下工作明显需要的书，而不订甚至马上就要

用的，例如组合学的书，这些论点都是反学术的，反智的。(我这里讲的不是我异想天开，我的确看到这种事情出现过。)一位好的系主任连一秒钟也不应支持这种论点。

有时关于课程的决定与人物的决定相重叠，而两者加在一起往往比单独一个更为复杂。有人——系主任往往是其一级近似——必须决定统计学是否应该（或者不）由数学系开，计算机科学是否应该由数学系开（肯定不）。有人——系主任？——必须决定数学系在多大程度上应该遵照当前教学和科研的时尚行事。我们非得把微积分换成离散数学吗？我们是否更重视极少曲面理论而不是低维拓扑学？系主任至少必须提出许多诸如此类的问题，而且在某些情况下回答它们。

系主任是一位行政管理人员。他是他的同事和大学行政当局之间的缓冲剂。他依靠的方式是十分重要的：他是位保护数学系的数学家呢，还是按照给钱的人定的调演奏呢？系主任既是职员又是经理，既是服务员又是领袖。要成为一名系主任需要一种特殊的天才和气质。它是一项重要的工作，但却是一项次要的工作，这里所谓次要的意思同《数学纪事》是主要杂志而《数学评论》是次要杂志的意思相同。系主任并不是自己要做什么事，而是要使其他人去干什么事。如果你正考虑要成为系主任，那你需要再考虑一下。这项工作是一个很容易干坏的工作，而且是一个干好了也得不到感激的吃力不讨好的工作。不管你干什么，总有人反对你。贪得无厌的系里成员和贵族老爷式的院长把你向相反方向拉，而你介于其间。在你开始一件事之前，你要非常肯定你到底想要什么，要是你开始干了，那祝你好运，你会需要好运气的。

怎样不当系主任

我本应该为当系主任而头痛，但是我并不。我认为我什么都知道。关于当系主任的事我什么都知道，它的意思同在我从来没教过书之前，我对教书什么都知道的意思完全一样。我已经注视过系主任是如何办事的，其中有的对，有的错。多年以来，我想我会很容易吸取他们的优点而避免犯他们的所有错误。我大错特错了，那完全不是一件容易的事。

1968年8月末，我的飞机在火努鲁鲁着陆，杰西来接我，带着一个夏威夷花环还有一个课程安排问题。她对我说："阿罗哈！哈尔莫斯博士，数学103课程注册人数超额，你打算怎么办？"（这个数字可能不对，但精神是对的。）我一下子没转过来，但幸运的是，当我问她这是什么意思，这种事情以前是否出现过，那时候你们是怎么处理的时，她一一回答了。（她总是有问必答。）我告诉她今年照去年的同样办法办，而这正好是她希望我说的；她很高兴地走了，而且照办了。第二天早晨，在第一个工作日我出现在办公室里后，再没出现别的问题。

杰西·中田真了不起，她生长在夏威夷，父母都是纯粹日本人，但她的母语是地道的美国话。她对她的祖先的语言和文化所知不多，只是一点点。她是位训练有素的秘书，例如，她能拼出我口授给她的每个词，但是她几乎完全没有受过任何教育。[有一次我偶尔提到该隐（Cain）和亚伯（Abel）的故事①，她说，她从来没听说过他们。]

在前两位系主任任期内，她是夏威夷大学数学系的主任秘

① 故事见圣经《创世纪》，该隐为亚当和夏娃的长子，亚伯为他们的次子，后被该隐所杀。这故事在西方尽人皆知。——译者注



J·中田（纳卡塔），1968年

书，我是她的第三位上司。除了她的全日工作之外，她还有位丈夫和3个学龄前的小孩。我见到她时，她大概快30岁了。

无论是她的人品还是她的外形（体态丰满），她在她负责的一小组年轻的打字员和兼职的秘书中，以及系里的教师和学生中，成为一位理想母亲的形象。

我马上很喜欢她，她也喜欢我。显然，我们能够一起工作得很好。我的太太和我逐步稍稍了解她和她的家庭。有几个星期六的下午，杰西带着她的孩子到我们家来喝软饮料，并用我们的游泳池，也有一两次我们出席在她家举行的大型招待会。但

是，她和我的主要关系还是工作上的，可非常友好；我们的谈话是很有效的，但决不是一本正经的正式场合的官话。

下面是杰西办事方式的一个例子。她的办公室和我的办公室之间的墙只有$\frac{3}{4}$的高度，不到屋顶。我的办公桌上有个蜂音器，在我需要她的时候用来召唤她。我头一次用它时，她隔着那不到顶的墙喊："您要干什么?"这是我最后一次用蜂音器。

她知道一位受过训练的秘书所知道的几乎所有事情，而且她极为聪明和大胆。假如我要她做某件事，是她以前从来没干过的，她可从来不会告诉我她以前从没干过；她会尝试做任何事，而且会取得成功。这里是一个普通的例子。我让她给我安排一次到美国本土的访问，稍微有点复杂。我告诉她时间和地点，剩下的让她去做。只有到后来，她安排好一切之后，我才知道，以前她从来没有同旅行社打过交道，对于航班表如何制定只有最最模糊的想法。

一旦她干完某件事，从那时起她就记住它。当院长的秘书圣诞节前打电话给我，提醒我做关于系的评估的工作，我就要杰西向我解释它是怎么一回事。原则上，这事非常简单，但是我想，做出适当的决策并不容易。这意味着，我得给院长写一大堆信，每封信评价系里一个同事。每封信实际上是讲3件事的1种：负号、零、正号（这是我事后总结的自己的术语）。"负号"表示这个人的工作不令人满意，对于他的薪金或级别不应该采取什么行动（除了由规定得很死的程式所要求的常规"按级"晋升之外）。"零"表示工作令人满意，但成绩不是极为显著；有现有资金在"零"的同事之间瓜分，但肯定并不推荐他们晋升。"正号"当然是优秀的分数，它意味着推荐并提高薪金，在可能的情况下，级别晋升。我吃力地写完这些信，我编

成3种格式，星期五中午把它们放在杰西的办公桌上。我于是度周末考虑什么信用于什么人。我不用浪费我的时间。星期一早晨所有信件，连同所有名字已放好等待我的签名。杰西了解数学系，也了解我；她清楚知道我对每个人要说什么。她"猜"的每个评分都对。

除了杰西之外，夏威夷大学几乎每一件事都是我烦恼的源泉。这种烦恼和压力是如此之大，以至于在我一生中产生一种心理征侯，它有一个我知道的名称。当然我知道像"焦虑"和"抑郁"这种词，但是它们还有很远很远的抽象含意，像"赔拉格病"（糙皮病）和"痨病"——我真不知道得上这种病意味着什么。我到夏威夷第3个晚上，我凌晨3点就吓醒了，浑身战栗，后来被诊断为得上了真正的、像书本上所讲的焦虑病。房子里没有什么使我产生惊吓的，但是我真吓坏了，可能是真正意义下的"神经错乱"。问题不断闪现，总是侵扰我（我不能说出一个名字，但是它们的确恐怖）、惊吓我，我不能对付它们，我不能对付任何东西。我把我太太叫醒，我讲——我讲——我不停地讲，于是我们吃点小吃，喝点啤酒。——我还在讲。1小时过后，我感觉好一些，我们回去睡觉—发作过去了，后来我就睡着了。

是什么使得我发病？我设想是过去和未来。大约6个月，我一直在面对系主任的问题，并一个一个解决。我刚从欧洲漫长的开会和讲演的旅途归来。我的生物日节律相位有几个小时的错位，而且我面临巨大的、几乎干不了的工作。我在日记中写道：它不能再飞了，但我还要让它打转。

我这么办了。我用全副精力和几乎全部热情投入工作。头号大问题：取消电视课程，换人上课，好了，让我们去。

电视课程是几年前某人灵机一动办的。为什么我们不能同

时解决两个大问题：数量问题及质量问题？我们（在夏威夷）没有足够人手去教大学一年级数学，足以应付大规模的需求，况且其中许多人程度实在太差。让我们把最好的、最受欢迎的老师，吉米·肖（Jimmy Siu）的课录像，然后把录像带散发给整个校园，可以 24 小时播放。学生们这样就会有充分的自由，他们想什么时候听课就什么时候听，想在哪里听课，就在哪里听，而且他们愿意听多少遍就听多少遍。教师们还是按钟点上课，显然，学生们会喜欢这种容易接近的公开大课和私人听带子的完美组合。

可是学生们并不喜欢它。他们想要一位活生生的教师而不是录像带上的老师；当他们有问题时，他们想同他们的老师讨论而不是同一个陌生人谈。这样一来，学生的学习劲头下降，出勤率下降，成绩也下降。于是我们必须做出决定：让我们减少损失。电视实验是件花钱的蠢事。现在学生比起 3 年前更愿意到教室上课，而新的系主任知道新的市场正在形成。让我们在今年年底就砍掉电视，然后请 20 位教师来取代它。

是的—— 20 位。这就是我的命令。按照当时流行的薪金聘用 20 位助理教授，一学年需要大约 10 000 美元。那时正教授一个学年挣 20 000 美元或者更多一些。当我告诉阿列克斯·海勒（Alex Heller）说，我提供 20 个工作岗位，每个用 1 万美元时，他想了一会说，“我想要 3 个”。

聘用 20 个人要做的事务工作真能累死人。大约需要交换 10 次信件来进行初步接近，回答问题，得到推荐信，安排会见，正式聘用；如果聘书被接受，要协助他安排行程和住房，——名单上每个人都得 10 封信。有一段（在 11 月）我共发 47 封各个不同阶段的邀请信：你是否有兴趣…？你是否愿意接受我的聘用，我就会处于一个非常特殊的位置。但是当然，他们不会

都同意。我在办公室墙上挂一张复杂的图表——记分卡，帮助我别把用夏威夷的钱所做的赌博延续得太久。

1969年美国数学会冬季会议在旧金山举行。我在伯克利的朋友对我非常好，他们在开会之前借办公室给我用，安排20位研究生跟我面试。完了之后，我把大本营迁往旧金山，从一个饭馆的餐桌到另一家饭店休息室，又会见另外20位候选人。最后任务没有完成，但已经相当好了，到4月1日，我聘得$17\frac{1}{2}$位助教（半位是夫人）和3位研究生助教。电视完蛋了，人民万岁！

终身的教员不容易吸引到夏威夷去（大学的质量，比较孤立，生活费用高，旅行时间长），但是，我请到我想请的访问学者，有的呆一个星期，有的呆一个学期，有的呆一年。哈塞（Hasse）呆了一年（那位伟大的代数学家、数论专家哈塞），同样列奥·莫塞尔（Leo Moser）（当时最有活力的组合问题家之一）和堂·弗赖塞（Don Fraser）（加拿大的领袖统计学家，上瘾的冲浪运动员）也都来此访问一年。列翁·柯恩（Leon Cohen）（已从国家科学基金会和马里兰的系主任职务上退休）和阿伦·席尔兹（我在密歇根的同事）都到此来一个学期。几乎所有来往于世界另一侧（澳大利亚，日本等）的每个人都在途中在这里停留几天。我记得其中有迈克尔·阿蒂雅（Michael Atiyah）、爱德华·柯林武德（Edward Collingwood，他现在是爱德华爵士，是少数封为爵士的数学家之一，我曾请他在顿迪喝一杯）、理查德·库朗（Richard Courant，当时身体虚弱，由彼得·拉克斯照顾）、乔·杜布，他们决不是名单中的全部。

此外还有正式的为期一周的访问学者。我从托德·费尔尼斯设法寻到资助，大约等于一位资浅的系里教师的薪金，然后

把它分成七八份花在杰出的资深的访问学者身上。他们来到夏威夷的频度大约是一个月来一位，来后成为我们大家族的临时一员；他们要作三四个报告（报告有各种水平，从专门论述到趣味数学），他们也会参加我们的午餐会、招待会以及漫谈和闲聊。我们的想法是使我们摆脱学术上孤立隔离的状态，结果令人非常满意。为期一周的访问学者包括安布罗斯、保罗·科恩（Paul Cohen）、莱斯特·杜宾斯（Lester Dubins）、爱多什和艾德·休伊特，其中还包括卡普兰斯基，但他属于不同的范畴，我们为他组织数学科学委员会地区会议（这种会议的主要报告人，一天报告两次，连续讲五天）；这次会议，参加者十分踊跃，取得了成功。

系主任的工作除了聘请访问数学家之外，还要关心许多远不是那么辉煌的日常行政管理问题：诸如课程和班级的确定，学院和系的委员会，用于咖啡上的专款，对于复印，邮资、电话的决策，秘书的福利待遇和晋升，同其他系主任和院长一起开的又长、又乏味、又没有效率的会议。对于所有这些事务，我都得适当操心，有的办得好一些，有的则很差。我有些同事觉得不错，而另一些同事，不用说，对我干的所有事都不赞成，不喜欢。为了使大家摸清事情的进展情况，我发出许多信息备忘录，我唯一可察觉的反应是收到一封嘲讽的匿名信，他要求出更多的备忘录（我毫不费力就查出谁写的信。）有一位同事送给我一份备忘录，开头有粗鲁的（?）称呼“哈尔莫斯系主任”；我不得不告诉他，我们没钱买他所要的台式计算机。（它实际上没让我伤心。）按大学规定我们不可能再聘用哈塞（他年纪太大了），就像年老的波斯国王一样，他把我这个消息传送者当成专门传递坏消息的人了。

系主任的主要工作是给系里提供心理治疗，这件事我可不

知道怎么做。我猜想，长期以来从直觉上就可以知道，系主任是世界上我最不愿干的事，只是出于害怕越来越接近老年以及夏威夷的辉煌前程的似是而非的考虑才改变了我的主意。甚至于在芝加哥，我在那里曾短期担任系主任，华尔特·巴特基(Walter Bartky)明白地跟我讲，我已经是列人系主任候选人的名单之中，这种前景也并不使我满心欢喜。恰恰相反，这正好是使我离开芝加哥的理由之一。在夏威夷，我干系主任在任何方面都相当卖力，包括心理治疗。但是我一点都不喜欢干。我勤勤恳恳当系主任整整 9 个月。干了 3 个月我就下定决心：我得走。我首先告诉杰西，然后告诉托德·弗尔尼斯，接着告诉莫奥基尼，最后，两周之后，告诉全系。每个人都反应很好：他们试图劝我继续担任系主任，或者，如果不行的话，让另外的人担任系主任，我还继续留在系里。我对这些反应很高兴，但是我急于回到现实世界中去，那是我的现实世界。在那个世界中，时间和地理都可能让我进行短途旅行，听讨论会的报告，参加学术会议，而且我总能知道在哪里有什么活动。

托德·弗尔尼斯交给我的最后一项大任务是给我自己找一个接班人。这没费多少事也干成了。H·S·比尔（H. S. Bear)，所有人都叫他杰克（Jake)，同意到系里来，成为我给他聘请的助理教授大军的系主任。

我在火奴鲁鲁的最后 6 个月的生活比一开始的 3 个月远为快乐。我继续干我以前干过的所有事情，但是，我的态度缓和下来，我也不再抱怨。由于有轻松的态度，我能干得更多。例如，我能在钻石头讨论班上工作得更卖力。讨论班有拉里·沃伦、阿伦·席尔兹和我；我们一周聚会一两次，早晨 7 点钟在我的钻石头路我的家中举行。(火奴鲁鲁是一个早起的城市，我也养成了早起的习惯。通常我 5 点 30 分醒来，游一会儿泳；7

点吃早餐。到7点30分，市中心早晨上班交通拥挤的时刻就过去了。）我们在一起喝咖啡、游泳，谈数学。一旦我知道我没有被判处当终身系主任之后，我就可以在备忘录和备忘录之间考虑我的定理，并发现我可以在讨论班做好自己的份内工作。

还有一个问题需要解决：离开夏威夷之后我到哪里去？理论上讲，我可以回密歇根，一旦我不受任何约束有了保证，一些工作机会就开始出现。11月有一天（我正好在奥斯汀的汽车旅馆，在那里有一些美国数学会的委员会事务要办），电话铃响了："保尔，我是阿仑·布朗，你有没有兴趣在我们这里（布卢明顿）印第安纳大学干呢？"我怎么能说不呢？



M·A·佐恩，1983年

当时印第安纳大学的系主任乔治·斯普林格（George Springer）邀请我到他那里的讨论会上做一个报告，并同他们的院长、副院长等领导会见。我去了，我做了报告，一个一个握手。我碰到了马克斯·佐恩（Max Zorn），他后来成为我十分珍

视的好朋友。他来喝茶，带来一个纸条，上面有一系列问题。这些问题他一直保留下来是打算问我的。马克斯是位好寻根究底问个没完的超级问题提问者。在私下谈话或者在公开的讨论会上，他总能确切指出深刻思想所隐藏的地方。两周之后，还在圣诞节之前，斯普林格就给我寄来聘书，我接受了；1969 年，我成为一名山地人。①

布卢明顿的生活

我到布卢明顿之前一年，美国教育委员会把印第安纳大学在同类大学中排名为 26，下一年又把排名修改为 27。我的一些朋友戏称这两个事件——我的到达和排名改变——互为因果。不管怎么说，他们对我都挺好。整体上讲，大学也对我很好，无论个人还是官方都是如此。因此我安顿下来，享受我的“黄金时代”，比以往任何时候工作都更勤奋。

第一步是组织一个泛函分析讨论班，对此那里似乎是一个很好的基地。首先，我们中 6 个人都是算子理论家。一位是阿仑·布朗，另一位是约翰·康威（John Conway，他不是英国剑桥大学那位研究数学游戏以及群论的约翰·康威）。彼得·菲尔莫尔当时还在那里（但是不久之后回到加拿大），同样，他的两位合作者乔·斯坦弗利和吉姆·威廉斯也在那里。吉姆是阿仑的博士生，因此，他是我孙子辈的学生。不论是由于爱好还是由于所受教育，我们所有 6 个人的兴趣都紧密相连。至少还有另外几位，他们或者能交谈或者至少能注意倾听泛函分析。比利·罗维斯（Billy Rhoades）以及格拉尼姆·本尼特（Graham

① 山地人（Hoosier）为印第安纳州人的别名，因旧时到印第安纳州定居的肯塔基州的山地人而得名。——译者注

Bennett）他们研究可和性问题，帕西·马萨尼（Pesi Masani）和斯利姆［＝塞穆尔（Seymour）］·舍尔曼（Slim Sherman）他们研究概率论。（不久之后马萨尼到匹兹堡去，后来，先是舍尔曼，接着稍后威廉斯都英年早逝。）

泛函分析讨论班一开头就不错，在我写这本书时，讨论班仍然在继续。讨论班的头一年取得异乎寻常的成功，这是因为乔治·斯普林格的一项行政管理上的好主意。那时，大学要庆祝她150周年校庆，斯普林格拟建立一个一百五十周年讨论班，并且告诉我让我负责。他的主意就是邀请为期一周的访问学者，但是不像夏威夷那样在一年中请6次或8次，而是每周都请，一周不拉。但是，日程表通常搞得不太好，有些星期，我们同时就有两位访问学者，但是我不记得有那一周1位访问学者都没有。

或许这听起来不错，但是还存在问题。访问学者可能会从星期天晚上一直呆到星期五下午才走。他会做一个报告并来同我们一起吃午餐和喝茶，而其余时间他就会看起来显得厌倦或者困惑。其结果就是，我们这些东道主感到，我们应该为他举办鸡尾酒会，带他参观游览，倾听他讲他最近的数学成就——这些当然都很不错，但是这种事情实在太多远远超过我们所能胜任的程度。从9月到次年4月，我们有超过25位的为期一周的来访者，我们希望他们在这里过得愉快，可是我们作为东道主实在不胜其烦，只有他们走后，我们才感到高兴。毕竟，一个讨论班上有像吉姆·格里姆（Jim Glimm），角谷静夫（Shizuo Kakutani）和乔治·麦基（George Mackey）这样的著名人物（我只是从25位来访者几乎随机地挑出3位）做报告应该称得上是成功的。访问者报告的主题都是当时新鲜的数学［例如，萨拉逊（Sarason）给我们讲他关于通过多项式的弱星逼近的工



印地安纳大学的泛函分析学家，1968 年，由左至右 P·A·菲里莫尔，J·G 斯坦弗利，J·P·威廉斯，J·B 康威，H·A·布朗。

作]。当我最近浏览一下报告题目，我十分高兴地注意到，关于这些主题的报告到今天听起来仍然十分有趣。

布卢明顿对我来说有许多有利条件。比如说，它是个小市镇，同我青年时代的琛巴纳差不多大小。从数学楼——斯威恩

(Swain）大楼再隔一个门就是法学院，使我得以利用它；我旁听侵权法和刑法的一年级课程。这里的音乐学院是全世界最好的音乐学院之一，从斯威恩大楼向另一方向走有4座大楼就是音乐学院，它对我一生有巨大影响。我见到雅诺什·斯塔克尔(Janos Starker）和梅纳姆·普莱斯勒（Menahem Pressler)，听过他们的演奏，由于他们在这里，使我获益匪浅：他们的学生、他们的同事，他们的来访者每个月差不多都奉献近100场高质量的演出。

印第安纳的泛函分析专家足够年轻，数量也足够多，一开始足以形成一个相当不错的集体。但是，由于各种个人的原因，这个集体从质量上和数量上都不断下降。除了泛函分析之外，数学系不算太强。代数几乎看不见，拓扑学也差不多（从那时起，已有相当大的改善)。系里也有一群名声响亮的应用数学家，他们主要是一些不强的分析学家，后来也改变得很不错。比尔·古斯塔夫森（Bill Gustafson）有几年和我们在一起，他是我的代数学“大夫”，干得很不错。他不仅仅懂得代数学而且还懂得数学，他对许多分支有很广阔的视野。他还是一位有文化教养的人，具有多方面的兴趣，例如他是侦探故事和30年代电影明星信息的可靠来源。与比尔同时，约翰·尤恩（John Ewing）是我的拓扑学的信息来源，比尔离开后，他仍然教我许多东西。因为他还懂得多得不得了的数论，而且又愿意谈数学，不论白天还是晚上任何时候都行，这使得他作为我的同事总会带来生活上的愉快。

古斯塔夫森和尤恩都是具有献身精神的数学家的典范，数学系过去有，现在仍然有一些数学家很像他们，但是数量极少。对于他们中的大多数人来说，工作就是工作，他们有干好工作的能力和意愿，甚至于偶尔也有兴趣的火花。但是工作对他们

来说不是一种召唤，不是一种使命。而对另一些人，工作是乏味的例行公事，总让人灰心丧气，他们干工作干到足以保住饭碗就行——再也不多干了。这不像高昂士气对每个人的影响那么大。

如果能属于一个共同体，其中大多数成员能够贡献出他们的最大能力而且从中获得自尊，那将是一种愉悦，一种有意义的满足。我讲的不是生产高质量的研究工作，不一定非得这样。一流的大学教学单位也可以成为这样一个共同体——只要想一下布林·莫尔学院和瓦巴什学院就够了。无论是瓦巴什学院还是芝加哥大学都以尽其可能试图做好工作为荣，——而据我的观察，印第安纳大学的麻烦就在于他们根本不去尝试。

当然，这种判断不免主观，它受到与数学毫无关系的印象的影响。从数学上讲，密歇根非常像芝加哥，但是没有芝加哥那么好，而印第安纳非常像密歇根，但是没有任何地方能有密歇根那么好。然而，比这点更重要的是，从各种几何标准来看，安阿伯地处中西部，却有许多东部作风；而从各种几何标准来看，布卢明顿也地处中西部，但对我来说，它似乎是南方的一部分。密歇根大学具有她应得的好声誉，这是由于该州承认和鼓励那植根很深的学术传统。印第安纳大学在"伟大的"大学之中靠近底部，最近 20 多年，她根本没有得到过任何配得上"伟大"这个词的学术领导和法律支持。当然，我在安阿伯是个"穿长袍的"，[①]但我感到当地居民对我们并无敌意，甚至也谈不上冷淡。而在布卢斯顿，很多时候，我感到像一位不受欢迎的外来陌生人，我相信用嘲弄的形容词"红脖子"[②]来描写大多数"市镇"里人最合适。不过我得赶紧声明我谈的是一般人，而不

① 指在大学工作的人。——译者注
② 指没有受过教育的农场白种工人，有轻蔑意。——译者注

是个人。有时在跟我打牌的一帮人里有汽车商、水暖工、卡车司机这类人，他们似乎也接受我作为他们的玩友，那怕我言谈举止有点古怪可笑。

印第安纳的大学生

让未来的博士生和未来的博士生导师见面并且互相摸清楚对方的最好办法是，在采取任何重大行动之前，在研究生的课程上进行。（这不是唯一的办法，但是最稳妥的方法。）我的许多学生就是这么成为我的博士生的。我总是教一年级的研究生课程“实变函数论”，接着是二年的课程——算子理论。我已经教过三四遍这套课程，每一次都培养几位哲学博士生，介乎4位到5位之间。

1969年我在印第安纳大学第一年开一门实变量基础的课。班上有20名学生，其中3人是乔·巴斯蒂安（Joe Bastian），堂·罗杰斯（Don Rogers）和卢斯·斯马克尔（Russ Smucker）。他们并没有特别选我——他们已经准备好上课。他们第一天到班上来时，我已在那里。第二年我教泛函分析，第一年上课那班有一半学生，包括他们三个人，选择跟着我上。上与我的平行的实变课的学生，也有一半上我二年级的泛函分析课，这些新来听我课的人当中有何塞·巴利亚（José Barria）和鲍勃·莫尔（Bob Moore）。在印第安纳大学我一共培养了8个哲学博士，其中包括我刚刚提到的5个人。

这5个人彼此相处得很好。他们全都研究算子理论，他们全都了解其他人正在做的问题，而且能够理解彼此的困难。我常常在班上，在公开讨论班上以及在我们的私人讨论班上见到他们在一起。（我的私人讨论班在我的客厅里举行，备有啤酒和

小点心。）当我在爱丁堡度过我的公休年的一个学期时，我设法得到资助让他们跟着我去，这也十分成功。他们享受到一个不太陌生国度里旅游的刺激，而且对他们每个人来讲，有其他人相伴使他们感到舒适和满意。他们现在都已经事业有成，其中3位（巴利亚、莫尔、斯马克尔）在学术界，另外两位在学术界之外。我在他们成为有用公民的过程中对他们有所助益，对此，我感到欣慰和自豪。

上面我提到，我有些学生参加学位论文的讨论使我的印第安纳的同事安娜·哈切尔（Anna Hatcher）大为震惊，特别是，她对于这个五人帮表示出不理解的反对。除了在这一小点上的短视之外，她是一位伟大的女性，我乐意回忆我见到她、认识她的情景。

在我们的，我的和她的，名字和照片有一天登在当地报纸——《布卢明顿先驱电讯报》上，之后不久我就见到她。在那春光明媚的日子之前几个月，我对事情理解得很慢。乔治·斯普林格问我一些不同寻常的问题（我获得过什么荣誉和奖励，我在美国数学会担任什么职位，我曾被邀请做过什么有声望的报告）。我已经到那里，我已经有了职位，那么这些信息还能有什么用处？他咕哝说，档案不完备。我也就没把这事放在心上。让我十分惊讶的是我的照片出现在报纸的封面上：我们院里有4个人被大学理事会晋升为杰出教授，其中两人就是安娜·哈切尔和我。当然，这是一个令人高兴的荣誉，而且薪金也有少量但令人愉快的增加，我反过来要了解他了。于是，我打电话给乔治·斯普林格，感谢他对我的提名。他因我的高兴——以及这个事实！——而高兴，因为他还不知道他的努力获得成功。我比他先看到报纸，我是头一个告诉他这消息的人。但一个可笑的印刷错误给所有这些提供了滑稽的反差：安娜和我照片下的

名字印反了。

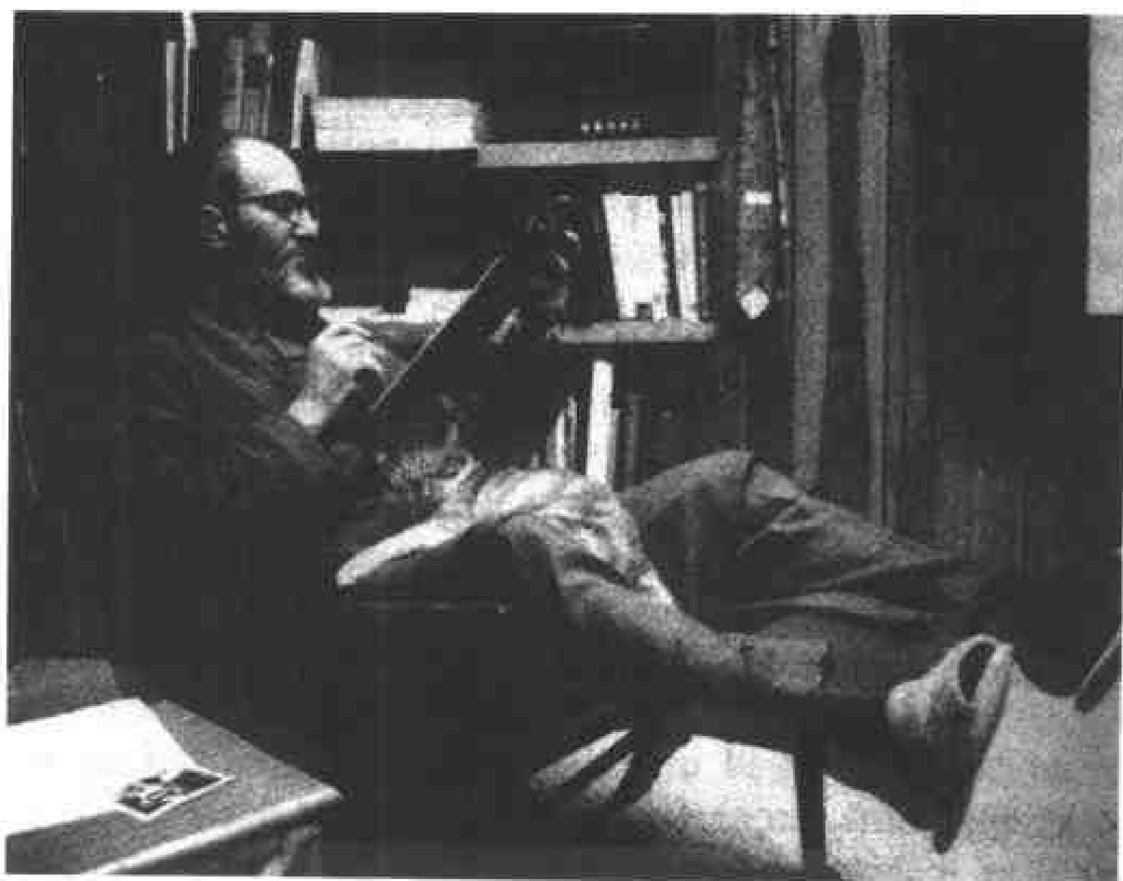
我打电话给她，自我介绍，祝贺我们获此殊荣，建议在这种情况下，我们至少要共进午餐。我立即喜欢上她。她比我至少大大约10岁。她所属的系两倍于我，听起来像四倍于我。她在法语和意大利语系以及西班牙语和葡萄牙语系任职。我们都对字词感兴趣，在她那方面是她的专业，在我这方面是业余爱好。后来这些年中我们的许多谈话都是关于语言学的。她写的书中有一本有（对我）很高吸引力的书名《近代英语词的形成与新拉丁语》。我们时常请她一起吃饭，而她并不想成为吃白食的人，也反过来请我们到她的小单元房中吃饭。社交总是十分愉快的，但她的厨艺实在太糟，不是鸡做得太老了，就是米饭烧焦或夹生。她耳朵重听，抽烟很凶，到70岁就（强制）退休，两年之后就去世了。我很思念她。

让我们回来谈我的学生。肯·哈里森（Ken Harrison）除了没学生的名份之外完全是我的学生。他是澳大利亚人。大学是在墨尔本的蒙纳什大学上的，跟着约翰·米勒（John Miller）学习。米勒并没有非得让他学任何特殊的学科，而结果当他对我搞的这种算子理论感兴趣时，米勒就写信给我，问我是否愿意让肯来这里跟我学习一段时间。我说，为什么不呢？而这“一段时间”从夏威夷开始。肯当时非常年轻（20岁？21岁？），金发碧眼，渴望学习，十分聪明，还带有我听到过的最浓的澳洲口音（比尔·古斯塔夫森后来跟我说，肯的口音把5个元音发成aye，aye，aye，aye，和u）。我们在夏威夷相处很不错，当我移居印第安纳时，肯也跟着来了。他写的博士论文是我一直感兴趣的不变子空间理论的一部分。从任何合法的意义下讲，我都是他的论文导师，但是由于例行公事以及为了他未来前程着想，最好还是由蒙纳什大学授予他哲学博士学位。结果就这么

办了。

下一个是堂·哈德文（Don Hadwin）。1970年春在福特·沃斯的得克萨斯基督教大学召开的数学科学委员会地区会议上，我是主要的报告人。我十分卖力地准备这次会议的10次报告，其结果成为我所写过的最好的研究水平的综述论文。我感到自己已深深扎到这个分支之中，我欣赏其中的每一部分，我试图不仅把新的论述技巧，而且把尽可能多的新数学放进我的口头演讲以及其后的论文之中。哈德文参加这次会议，似乎学到一些东西而且喜欢上它，一年或两年之后，他在布卢明顿露面，说他想当我的博士生。这可不是干事的正常途径，但是我在他身上压宝，我赢了。他也写了一篇关于不变子空间的博士论文，而且是一篇优秀论文。而且他由此前进成为算子理论界的完全合格的一员。

我在得克萨斯基督教大学报告的出版还有一个小插曲。当时国家科学基金会对于地区会议的资助方式（该组织至今仍然基本上一样）就是给报告者N美元讲课费，其后，如果报告者投寄一份可被接受的手稿，再付给N美元论文费（现在我记得当时N为1500美元。）其想法过去是，现在仍然是在一个特殊的丛刊中发表这份论文。但是我很不喜欢这种想法。特殊的丛刊发行不广。其中每一册只有几十个个人会去买，另外有几百个图书馆可能订这个丛刊。大多数人甚至根本从来不知道这类丛刊、丛书的大部分。如果偶尔听说其中有些有趣的东西，他们在他们的图书馆也找不到。你随机选取非主要的大学，不论在美国或者在日本或者在波兰，它们都不太可能对许多特殊的丛刊、丛书有足够的信息，也不太有足够的钱来订它们。这种大学的教师似乎也从来不会看陈列在新刊架子上的大多数期刊。同样的论证一般也适用于出版的“会议录”。我想这是个错



P·R 哈尔莫斯，1970 年

误的想法。

我热心于让我的这些有启发性的话让每个人都看见-—当然你不一定喜欢它，但是丢掉它的决定不是别人而是你自己做出的。我把我的意见讲了出来，在正式交换几封信函之后，结果达成协议。好了，我收下 N 美元而不是 2N 美元，而我可以按照我的意愿处理我自己的手稿。我叫道，棒极了！于是我把手稿寄给《美国数学会通报》。我真走运。刚好在我投寄之前，美国数学会为了提高《通报》上综述论文的数量和质量，要进行一次实验，给 10 篇这类论文付稿费，不管有多少篇投寄的稿件，从中选出头 10 篇。(我想稿费为 1000 美元。) 实验并没有取得很大成功。显然人们不想写综述论文，或者不能写，甚至

为了稿费也不会写。经过很长时期才得到 9 篇论文，而我的手稿寄到时，还没有第 10 篇出现。《通报》接受了它，我也得到了我的稿费，不管怎么说它相当于我的报酬的 2/3。在论文开头我加上一段献词："献给我的老师和朋友约瑟夫·列奥·杜布，我的崇敬和热爱"。其结果使我自豪。论文发表后，乔寄来明信片，他写道："我十分惊喜地读到你的献词，但是你使我感到像一座丰碑！"

这是第二次乔给我写的致谢短笺。第一次在几年之前，我在一份邮寄的订货目录中看到"鞅"，于是我买了一个寄给他。赌徒常常讲传说中的马丁格尔（Martingale[①]）上校，他每次赌输之后就要加倍下注。原来，这个词在概率论中产生出一种专门的意义。杜布把鞅定义成一种特殊的随机过程，而对于随机过程理论，杜布做出许多深刻的贡献。但是"鞅"的首要含义是"马具的一部分，设计它是为了防止马头后仰"，这就是我在目录中看到的东西，乔十分高兴买一个，他写道："我十分感谢你寄给我的鞅，这正是我办公室所需要的。现在鞅挂在我一个书架上，靠近我收集的手稿，很相配"。

我在印第安纳的最后一名学生，事实上，也是我最后的哲学博士生是桑德尔（Sunder）。他的全名是威亚卡拉图尔·商卡尔·桑德尔（Viakalathur Shankar Sunder），但是他的名字，也就是别人总称呼他的名字就只有桑德尔。这同约翰·勒鲁瓦·凯利（John Leroy Kelley）很不一样，一些糊里糊涂的傻瓜叫他约翰，他的家里人叫他勒鲁瓦，但他的所有朋友都叫他凯利，这是他独一无二的特有风格。而在桑德尔的情形，威亚卡拉图尔是一个地名，商卡尔是他的父亲的名字。于是他真正自己的名

① 它做为数学名词译成"鞅"。——译者注

字是桑德尔，不管是他母亲，还是他的朋友，还是陌生人都这么叫他。

他从马德拉斯来，听我为一年级开的实变函数课，很快就表明他是位聪明又勤奋的学生。除此之外，他还彬彬有礼，十分可爱，喜欢交谈，善于辞令，他具有多方面的兴趣，包括演奏印度乐器，(而这些乐器在西方不广泛为人所知)。他还跟着我听这轮二年级的课，然后就问我，是否可以跟着我做博士论文。我很高兴地答应。因为当时我正写一本论积分算子的书，我让他读一些这方面的文献以及我的书的草稿，这些他都十分轻松而且显然非常高兴地完成了。

这时，突然，好事者又来缠上我了。约翰·恩斯特，我的一位老朋友，有一天从圣·巴巴拉打电话给我，问我是不是愿意到他们那儿去。我非常感兴趣，也如实告诉他，但同时我也表示异议。我说，“约翰，我太老了，而且身价也太贵”。那是1975年秋天，我快到60岁了，我的薪金是41 000美元。他没有却步，谈判继续进行。结果：我移居圣·巴巴拉。

这次搬得真傻，但幸运的是，无论从心理上还是专业上来说对我没有太大影响，圣·巴巴拉没有什么事是内在很坏的，但是对于我来说，比起印第安纳我更不喜欢圣·巴巴拉，不满也更多。圣·巴巴拉城市十分漂亮，气侯温暖宜人。文化设施(例如音乐)都有，只是数量不足。大学是二流的、在加州大学系统极其高压的官僚主义管理体制实在让人感到不舒服。那里有一些友好的、有才能的人，当然也有一些没用的废物。过去哈特费尔德(Hatfield)和麦科伊(McCoy)对立而导致系里的分裂造成了痛苦的记忆，而且仍然不时引起摩擦。我教少数课，思考一些数学问题，完成我的积分算子的书。两年之后，又回到印第安纳，难道阳光我还没晒够吗？

桑德尔同我一起到圣·巴巴拉，在那里完成博士论文。他得到一些漂亮结果，看到他逐步取得成就真是让人激动。他把紧性带回到积分算子理论中去。1976年圣诞节左右，他每当取得了突破，他就要十分高兴气喘嘘嘘地跑到我这里来，不论早上还是晚上，让我知道他刚得到的秘密。他解答了太多的问题，以致我的书要是不收进他的结果就会是不完备的。但同时，把它们放在我的书里，而且在我的名字之下首先发表出来似乎也是不公平的。一个可能的解决办法是让他跟我合作写书，这种解决办法对我似乎很公平，可是我仍然担心。师生关系这么好，要他谢绝我的邀请几乎是不可能的，我担心他在强迫之下接受我的邀请。不管我是否担心，我还是问他，我相信他的同意是真诚而热情的。

故事结局不错，合作富于成效，我们都勤奋工作，写了一本非常好的书。这本书出版之后，发现它美中不足之处主要是：我们忽略了一部分文献。（我们？这是推诿责任。是我遗漏掉的，作为论文指导教师，我负有责任。）桑德尔证明的一个定理在以前已经证明过，书里提出的一个问题以前也已得到解决。出问题的文献是俄文的，牵涉的人是柯罗特科夫（Korotkov）和布赫瓦洛夫（Bukhvalov）。太糟了，但是这种事情还是发生了。我本不该让这种事出现，但是我没做到，它还是出现了。

只有一次，我们产生主要的意见分歧。在数学及其论述写完之后，我写了一段关于阅读本书所需的预备知识。这一段中有一句话是这样的："…读者应该知道x，他应该或者知道，或者愿意相信，或者愿意去查阅y。"桑德尔坚决反对，他决不赞成这句话。理由：这是一个性别歧视者的句子，它意味着读者他必定是男性，桑德尔的信念不允许他赞成有如此含义。这下子轮到我发疯了。我说简直是胡说八道。正确使用古典英语中

性代名词根本谈不上性别歧视。仅仅是由于历史偶然性才使得它与阳性代名词具有相同的形式，它不管怎么说也没有性别的含义。使用“他或她”这种丑恶的用法反而会引起人对性别的注意，而这本来没人打算这样做，也没人会这么理解（除了那些有着病态敏感的以及对文法一无所知的读者）——我们就让那句子保持原状，或者换一种说法。换什么？桑德尔十分坚定，我也十分坚定。他坚决反对用“他”，而我绝对反对用“他或她”。结果自然是一种妥协。但是，我想桑德尔实际上赢了，而他或许认为我赢了。

一人委员会：瓦巴什

大学中许多可称之为“服务性工作”的大多是委员会工作。这是一种有史以来所发明的以最浪费时间、最无效率的方式关注鸡毛蒜皮的琐事的工作。举例来讲，我曾是系里研究生政策委员会的成员，而这个委员会除了建立和保持平庸的学术水平之外什么也不干，我没有参加过学院的终身职位和晋升委员会，而这个委员会除了在系里的推荐和行政当局决定之间毫无必要地拖长时间之外，什么事也不干。

在行政权力有效的代表制（这是件好事）和它可笑的稀释之间毕竟有天大的差别。研究生政策委员会必须做出的决定完全可以由一个认真负责的研究生事务的主管来做，而且可以做得同样好。不，由一个人来做决定要比 6 个人做决定要好得多，而且又快又好。

有的系委员会经常只有一个成员。到目前为止，我只能说，它们的运作同大型委员会一样好，甚至更好。图书馆委员会就是一个常见的例子，它可以由一位富有献身精神的系里成员组

成，他喜欢图书，了解图书，而且能够同图书管理员讨论专门技术细节。另一个常见的例子是学术讨论会委员会，一个人就能组织讨论会，进行运作，与其他活动相协调，一个人干这件事比两人委员会强4倍，比3人委员会强9倍。

《美国数学会通报》由3人组成的编辑委员会运作。但是，事实上它是由3个小的编辑委员会组成，每个小委员会只有1个人。3位编辑，1位负责研究--综述论文，1位负责研究成果简报，1位负责图书评论。大“委员会”只是偶尔开会，它的3位委员完全自治，每一位干他自己的事不受其他人干扰。3人中有1人任执行编辑，由3个人轮流担任，但是他通常有机会执行的唯一一项工作就是同设在普罗维登斯的美国数学会总部进行常规的通讯。

《美国数学月刊》看来彷佛具有--个巨大的编辑部，大约有20人之多，但是这种表面现象再-次是骗人的。20人中有一个小的子集合（1到3人）编辑短文，甚至于这个子集合的成员也各有分工，事实上每个人在做出编辑的决定方面都是全能的独裁者，既不听命于上面的命令，也不取决于他的同事的投票结果。《月刊》的其他栏目也享有同样的自治，而主编（the Editor，具有大写字母E的编辑）的功能是编辑他那栏目，同时以一种戒备和担心的目光注视着他同事们的活动。

如果1人委员会不能运作会怎么样？当2人委员会或3人委员会或7人委员会中有一个成员办事拖拉，其他人就能肩负起全部负担，胡乱应付过去。的确如此，这可以看成是委员会制度的优点。我曾见过1个贼懒的1人图书馆委员会，他把所有工作都让图书馆管理员去干。那些年图书的征订搞得乱七八糟。我还见到1位糟透了的毫无条理的组织者（他是由民主选举选出的系主任任命的，但是这位系主任的判断力实在太差）胡

拼乱凑讨论会的程序（讲演没有题目，报告人没有旅馆房间，有好几星期没有报告人）。我还知道有的编辑居然让尚未处理的手稿堆在办公桌上几个月（甚至几年）之久。事实的确如此，它的确必须认为是1人委员会的行政管理体制的一个严重缺点。

我们必须进行选择。我们是选择像一条不摇就哪儿也到不了的小船那种可靠的平庸呢，还是面对完全受阻甚至可能倒退的危险，而去选择发挥创造性的想像力和献身精神的艰苦劳动呢？你做出什么选择依赖于你的气质。至于我，我是一个有冒险精神的赌徒，我坚定地相信，由好的1人委员会可能带来的大收益是值得付出偶尔的、临时的代价的。

我曾在大的系委员会和专业委员会干我份内的一些事务性工作。但是我相信，我能对数学共同体做出的主要贡献，都是从这种情况开始的：有个人把扫帚放在我的手中，然后说"扫吧！"这种扫帚有一个就是厄尔·伯克森（Earl Berkson）的建议。在30年代，亚里斯多德·德米特里乌斯·迈克尔（Aristotle Demetrius Michal）领导一个著名的漫游讨论班。它在南加州大学、加州大学洛杉矶分校以及加州理工学院之间，跟着亚里斯多德从一个地方漫游到另一个地方（就像古希腊的亚里斯多德那样）。60年代末NBFAS（北不列颠泛函分析讨论班，读者如en-bee-fass），开始在爱丁堡·格拉斯哥和纽卡斯尔集会。可能受到这些先例的启发，伯克森建议，在布卢明顿（印第安纳大学）、拉法耶特（普杜大学）和厄巴纳（伊利诺伊大学）的泛函分析专家们定期相聚，交流专业技巧，互相闲谈。

它办成了。厄尔和杰瑞［迈尔·杰里森（Meyer Jerison），当时普杜大学的系主任］和我组织这个活动。我们非常幸运为我们的集会找到位东道主：瓦巴什学院（在印第安纳州，克劳福德维尔），它的位置差不多是布卢明顿、拉法耶特和厄巴纳的

重心，而且当地的数学家，特别是比尔·斯威弗特（当时是他们的系主任），花费很大力气使得会议开得愉快而且有效益。

我们的“正式”名称是“校际泛函分析讨论班”。但是，平时用的辞是瓦巴什［你听没听上次关于格里森（Gleason）定理的瓦巴什报告?］。会上思想交流十分活跃（正式讲课，非正式的讨论，富有挑战性的问题），在报告之前和报告之间还有茶和小点心助兴，报告之后还有饮料和正餐。节庆从星期六下午两点开始（在一学年中共有6到8个星期六举办这种活动），通常在7点半休会。其间五六个小时，有时搞得很乱，但一般总让人长知识，有所收获。我们参加会的都了解到其他人正在干什么（新技巧、新定理、新工作、新同事），而到家之后感到疲倦但十分兴奋。我们十分高兴会议结束，但又盼望着下一次。有时我们几乎找不到机会坐下来平静地思考一下刚刚听到的内容。

一开始，瓦巴什只靠热情来运作——对会议没有资助，没有人得到交通补助或者其他资助，每个人都共同出钱付小点心的账。经过3年，我们的声誉日隆，足以让我们能够安排一次国际会议。这次会议得到国家科学基金会的支持，而且给一些数学家付从国外到此开会一周的费用。注册的参加者人数众多(12^2)，其中包括从夏威夷、爱尔兰、以色列和罗马尼亚来的人。可以称得上数学和厨艺两方面都很成功。

在这次大型集会之后，我们回到我们原先的较小规模，每月开会平均参加人数大约为25到30人。参加者并不限于会议主办单位的数学家，他们还包括许多附近学院或大学的来访者，例如包括肯德基州，还有一两次甚至于来自密歇根州（莱昂·布朗驾驶他自己的飞机来）。经过12年的运作，这个讨论班向国家科学基金会提出申请，并得到一小笔资助，它可以用来付

偶尔从远道而来的报告人的交通费用。由于我担心这可能导致官僚化，我表示反对——但是，我的担心至今表明是毫无根据的。

负责运作这个讨论班的3人委员会不断地换人，最早的开创者现在都不是委员会成员。瓦巴什的成功一个可能的理由是，委员会没有太多事要做，另一个理由是它实际上是3个1人委员会。其中一个负责在每一次会议之前邮寄通知单，而3人每个人都负责对本校施加压力产生本学年他们学校的报告人——这就是他们要干的事。

我在圣·巴巴拉最令人自豪的成就之一，就是建立起南加州泛函分析讨论班(SCFAS读做esscee-fass)。它似乎成为南加州数学生活的一个永远的组成部分，只有极少数的傲慢无礼的山里人胆敢把它称为西部瓦巴什。

一人委员会：《通报》

1974年我成为《美国数学会通报》的书评专栏编辑，按照常年的传统，我的任期是两个3年期。在我到任之前12年中，这个专栏已经处于衰亡的状况，这些年的编辑似乎把他们的职位当成一项荣誉，而不是一件工作。30年代，《通报》每年平均发表大约70篇书评，而在1961到1973年间，每年平均只有10到15篇。我开始干这项工作时充满了热情和抱负：我打算发表大量书评、好的书评，使人们读，从中学到东西，而且享受到乐趣。

我订阅《纽约时报图书评论》，我的想法就是照它评论文学作品那样去评介数学书。我读《纽约时报图书评论》是因为我没有时间读所有出版的书，读书评比起根本什么也不读更使我

与近代文化保持更密切的接触。我寄给将要写书评的作者的说明中有如下的段落：

> 内容评注表是坏的书评。没人想知道某某的定理出现在如此这般的章节中。
>
> 好的书评是对当前感兴趣的主题的闲谈式的评述论文。书评的目的是用三四页纸对于书中用（或者可能用）三四百页的内容提供一个一阶近似。

我告诉书评作者可以表达他的评价性判断“它应该出现在每位学生和学者的书架上”，但不一定需要。事实上，我进而告诉他们，除了在靠近书评结尾处有一段出于礼貌提一下这本书之外，他们甚至对该书可以一字不提。他们的目的是使读者接触现代数学以及它的发展，而不是要讲关于一本书的事实。

在许多学科领域，像历史、经济学或哲学，有这样的传统，即把书评看成学术上的贡献，无论是书评作者还是读者都十分认真对待。我想要在数学中建立（或者重建?）这个传统。我的目的并非要帮助读者做出决策，是否要花 $29.50 买书，而是要办一份有趣的杂志。

我为我自己也同样为书评作者制定一些基本规则：不评论研究性专著（例如《美国数学会文集》或者大部分斯普林格出版社出的讲演记录），不评论学术会议的会议录（有 15 个作者），不评论教科书，或者新的重印版本，或者译本，或者已经出版两年以上的书。我还决定紧盯着数学，不评来自计算机数学、经济学和生物学方面的书。我想，我对于每条规则总设法至少违背一次，但是在大多数情况下，它们都是能得到很好的执行。

书评编辑干什么呢？他打开一大包一大包的书；他把这些书的作者、书名、出版机构，以及其他书目内容登记在主记录本上；他决定那些书送出去评论；他试图以一些聪明的方法处理其他的书；他选择一位书评作者；他要（多次）提醒作者书评交稿日期已过；他要阅读书评、编辑它并看校样；他还要力图保持对这项工作足够的兴趣，以便下星期他还能再干。要是没有一位聪明的勤快的秘书，这一切全都是不可能的。我估计这项工作每星期花掉我10个小时，而且需要秘书花大约两倍的时间。

在我当编辑（不要问我精确的定义是什么）的那些年中，每年就我所知，大约出版1500种数学书。其中有400多种寄给我进行评论。我觉得我很容易就能判定哪些书（约占20%）可送出做书评（平均时间：20秒），而且处理其他的书也没什么困难。（我赠送其中大多数，比如说79%的书给大学图书馆，而保留并珍藏剩下的1%的书作为我干这项工作的外快。）而最为困难的任务则是找一位书评作家。

对每一送评的书都附上一张书评记录单，其上包括所有有关的信息。它摆在我面前，我就会坐着，闷闷不乐地瞪着这本书，努力想出一些名字来。我会看看这书的书目，如果它提供了任何可能的人选，我就会把他们涂写在书评记录单上。我力图想到一些著名的人物或者不太出名的朋友或者我上周去讲课的学院的某位数学家，我希望他们中有一位愿意写我所需要的书评．我会在《数学评论》中搜索，注意作者和评论员的名字，不断把他们加到我的记录中。我不得不保持警觉：书评作者最好不和书的著者在同一个大学，也最好不是作者的博士生；或者从另外一种方式讲，书评作者也不是这门学科的死敌，虽然具有不同观点可能很有趣，但他们之间的世仇可能具有血腥味，

这样书评作者会严厉批评这本书而不管其内容如何。还有另外一个明显的边界条件：假如我已经在那年两次聘用一位完美的书评作者，我最好不第三次过度利用他的优秀品质；如果我现在让他好好休息一下，我可能在将来从他那里获得更多的金蛋。

一旦书评记录单上有了六七个名字，有 10 个或 12 个名字更好，我就会很从容地选择其中一位，向他发出正式信函。“本书书名为……著，已经寄到《美国数学会通报》准备评论。我愿意问您是否愿意评论本书，多少按照信中附页中所叙述的精神。”如果表示接受的明信片在五六周之内寄回，那（眼下）事就妥了；要是没有，我就把正式信函寄给名单上另一个人。为写一篇书评我提出请求的平均次数为 2，这里“平均”的意思表明，许多书需要 3 或 4 次，我记得最大的次数为 7 次（该书一直没有获得评论。）从许诺到我收到书评手稿的平均时间，要用 6 周，我记得最大值为 18 周。

有些书评作者我很喜欢，而有的真气得我发疯。只是单纯的不履行责任还不足以使我血压升高——这种情况出现太多了。典型的景象：接受卡很快就寄回来了，可是 4 个月之后寄出的催稿单被置之不理；再过两个月之后的催稿单还是一样，再过 3 个月催稿单还是不理。于是，我耸耸肩膀，放弃了。代价：1 美元的邮资，几小时的工作、一本书、一篇失掉的书评，还有从名单上划掉一个名字。还有一些书评作者事实上也干出同样的事，只是干得更体面。例如有位受良心谴责的书评作者公开承认失败。“我决定，我不太可能写这篇书评……。我想保留这本书（我在书上写下一些注记。）……请告诉我它值多少钱，我马上寄张支票过去。”我的答复：“不要为这事不安，当然，也**不必**寄支票。这是免费的书评用书，书评编辑知道，他不能每本书都得到书评。”

也有些书评作者毛遂自荐。我不记得有什么情况，其书评取得成功。有一两次我把书寄给不是我征求的书评人请他写书评，评审意见是不予刊用。更经常的是我自己已经足以认为他们是不可接受的，但是用我自己的官僚主义规则来解释："对不起，书评只用通过聘请写的。"还有一位自愿的书评作者，我告诉他他想写的那本书的书评已经拿去付印，他还不死心，鼓动我发表第二篇书评，他写的书评。因为，他描述的详细计划听起来很有趣，我谨慎地鼓励他继续努力，把它写出来；我拒绝没有看货就买小猪。但是，要是小猪长大了，我乐意掂掂它的份量。结果，他寄来一封热情洋溢的信接受我的条件，然后就一直再没下文。根本没有猪。

我已经认识本努瓦·曼德尔布洛（Benoit Mandelbrot）有一段时间了。当我从他那里听到他关于分形的书，我就急于让这本书得到评论。这真交上一次好运，我想。正当这个时候我收到一位备受尊敬的著名法国数学家一封短信自愿写该书评论。我立即答复："我十分高兴得到您的提议，……我热情欢迎您写书评，我期盼着读到您的论文。"这是1977年11月，他预定交稿日期是1977年圣诞节——速度令人吃惊而使人愉快。1978年2月，我寄出我通常的催稿信：

> 曼德尔布洛的书的评论写得怎样了？
>
> 您为自己规定的时限已经过去，但是这并不使我担心，写作高质量的书评不能匆忙，也不能强迫。
>
> 这封信目的只是提醒您，并要求您给我一个新的时限，既有限又现实可行。请把日期记在我附寄的明信片上，我将在一段比较长的时间内不再打扰您。好吗？

明信片很快寄回，上面写着“1978年4月1日”。我后来在5月和7月的问讯，就没有得到答复。这样，我再也没有得到《通报》上发表曼德尔布洛的书评的机会。

我经历的最为骇人听闻的违约是由罗纳德·李普斯曼(Ronald Lipsman)的一卷讲演录开始的，对我聘请的答复很快收到。

> 我非常愉快能为《通报》评论李普斯曼的《群表示》。过去几年间人们对这个领域的兴趣显著增长，近年来出版了许多书，讨论这门学科的方方面面。我感到把所有这些书的书评发表在《公报》上非常有用。我提出下列的计划。
>
> 我将评论7本书……按照下面的日程。
>
> R·李普斯曼，《群表示》；S·盖尔(Gaal)，《线性分析》……。1975年1月1日前。
>
> A·保莱尔(Borel)，《…群表示》；N·瓦拉赫(Wallach)，《调和分析》；G·瓦尔纳(Warner)，《调和分析》。1975年4月1日前。
>
> I·M·盖尔范德等，《表示论……》；S·朗，$SL_2(R)$。1975年夏中。

我立即答复：“你实现了一位书评编辑的愿望。”我同意他建议的7本书中的5本，除掉盖尔范德的书，因为太老，和朗的书，因为太新当时还没有出版。于是我写信找另外5本书，得到后，寄给“书评者”评论用书（在1974年，5本书价格稍超过150美元。）剩下的故事就是催稿信，受挫，最终完全失败。我在1975年10月初写信给他说我放弃了，他在6周之后给我回信“不要放弃！……我已经快要完成李普斯曼的书评。我写

完之后，我希望为其他 4 本书建立一个时间表。”这就是全部：再没有收到他来的信，也从没收到任何一份书评。

我的档案中包含所有这些罪人的名字，只要收到少许贿赂就足以使我揭发他们。

这些只是当一名编辑的一点点磨难。我觉得这些磨难让人气恼，同样也让人觉得很有趣。我还会继续谈一些磨难，这些磨难远远超出大多数人忍耐的限度。这项工作也有报偿。在我当编辑的第一年，1974 年，我为 75 个书评进行通讯联系，我收到并采用 22 篇书评（其余书评直到 1975 年才收到）。但是，由于我寄一篇到普罗维登斯之后，要至少等 6 个月才能发表，因此 1974 年只有两篇真正发表。一旦这种短暂的耽搁过去之后，我每年大约发表 75 篇左右的书评，但是它们和 50 年前的那种目录加评判的书评完全不同，它们是每篇平均 4 个印刷页的评述论文。并非所有人都喜欢它们，这是肯定的。但是，人们读它们。结果我对邮件又讨厌，又喜欢，但总的来讲，我感到我还是干成了一些事。你有所失也必有所得。

《美国数学月刊》

有些人嘲笑《美国数学月刊》。他们骄傲地宣称："我从来不读它"，"它全是垃圾"。在讲这句话时，所谓"垃圾"的意思就是"平凡无聊的东西"，不新，不深，也不是研究工作。更有甚者，他们讲，其中全都充满那种教育上的胡说八道。

另外的人咒骂《月刊》，给编辑写怒气冲冲的信。他们说，《月刊》原设想给教师看的，它应该几乎完全集中于数学教育。他们说，所有那些纯粹数学研究的垃圾（在不同意义下用这个词），我们不感兴趣。

《月刊》是世界上发行量最大的数学杂志，而且我推测它是得到最广泛阅读的数学杂志。其最古老的特色是其中的论说文章和问题专栏。而且我猜想，问题栏是首先吸引读者的专栏，也是最为读者喜爱的专栏。当我被邀请继拉尔夫·博亚斯（Ralph Boas）任主编时，我没有马上答应。难道我乐意站在中间，让人从两边扔碎砖攻击我？我认为《月刊》是很好的杂志。我是否有机会能保持其优点，甚至使它变得更好，还是命中注定我将成为使它没落的一位主编而载入史册？

在我真正开始干之前，我考虑了差不多一年，最后我决定抓住这个机会。这样生活一下子变得忙碌（更加忙碌）起来，从那时起，忙碌系数一直稳步增加。我必须制定计划，我必须吸收人参加工作。我同美国数学协会的官员们（秘书、财务、执行主席以及其他人）详细地讨论，向我的同事们咨询（系里是否愿意支持我的活动，因为事实上它要占用我一半工作时间）而且我还得建起我的班子。类比：编辑部的组织有点像州长或总统的顾问团。每位副主编都在他们的主管领域有全权，其中某些人甚至有他们自己一份预算，但有时他们必须同其他（主编）副主编协调他们的活动，在某种意义下，他们在主编之下，受到主编监督管理。主编任期5年，他挑选他自己的副主编，他们的任期同他的任期完全一致。

我同阿列克斯·罗森伯格（Alex Rosenberg）（博亚斯的前任）和哈利·弗兰德斯（Harley Flanders）（罗森伯格的前任）进行过长期谈话，我还同博亚斯在一起消磨整整一天。这一天使我获益不少但也十分累人。他们对我所问及的问题给出很好的建议，特别我对副主编的决定很大程度上是我从他们那里学来的。《月刊》的专栏（用现在的词）包括：论说文、短文、教学、问题和评论。主编负责论说文，其他每一栏目都由两三人组成

小组负责。还有少数“无任所”副主编，他们大多数人的工作是帮助主编，对他一窍不通的主题提出意见。例如，我要求赫伯·威尔夫（Herb Wilf）作为我的计算机科学副主编，他对我十分有用，起的作用超出我的期望。他写了几篇文章，征求并编辑其他文章，在我需要他时，他总能随时给我安慰和智慧。

我必须决定《月刊》的重点所在，其中一部分甚至在我组成班子之前就得做出，还有一部分在组成班子的过程中征求他们的意见后做出。主要问题是：我想让这个杂志走向何方？答案是：数学。我想要的论说文和短文都是对数学的论述；我想要数学栏完全集中在数学上；甚至书评我也想要它是数学的，而不是目录式的；我不要强调“小研究”而强调论述说明的文章；我要使数学方面的讨论主要涉及学科主题的思想而不是传授它的力学和统计；我当然肯定要离开社会学和政治远远的。

有人认为《美国数学会汇刊》是登好文章的杂志，而《美国数学会会报》是登差的文章的，而《月刊》就登剩下的文章。假如他们并不为他们写的文章觉得特别骄傲，或者让《会报》退了稿，他们就会把它们投给《月刊》。研究畸性拓扑学（teratopology）（研究怪诞的拓扑空间的性质）和组合学的没意思的那部分的小研究论文以让人受不了的频率充满着我的邮箱。过去的主编有时发表这类货色，我力图不发表。只要是研究论文，甚至好文章我也不登。《月刊》不是研究论文的出路，我不断告诉作者这点。没有法律法规禁止一项数学成果首先在《月刊》上公诸于世，但是如果文章只是一个新成果，但我就会敦促作者把它寄到其他地方去。

我把“数学教育”栏目的名称改称为“数学教学”，一个理由是强调：“数学教育”是带形容词的“教育”，而不是数学。另一个理由是集中：如果作者在教育方面的智慧在把“数学”这

个词换成，比如说，“地理学”，它还是完全言之成理，那我觉得，还是把它发表在教育方面的杂志而不是数学杂志上更合适。

我的目标，尽一切力量使《月刊》成为数学的杂志，并没有达到。但是，我仍然认为它是一个应该念念不忘的好目标。数学哲学是数学的吗？数学史是数学的吗？我的答复是肯定的，但它自然必须是有条件的肯定，依赖于作者所谈的是什么。哈里·弗兰德斯引起的电报式书评是数学的吗？我的回答是否定的，但是由于它们很受欢迎，许多人用它来选择下学期的理想教材，试图把它们撤销主编得付出高昂的代价。我引进（再引进？）的数学家照片是数学的吗？不！但数学家喜欢看，没人会反对。

《月刊》的主编对这份杂志有很大权力，他说的话一定得照办。各式各样的主编都试图以不同的方式把他们的个人印记印在他们的产品上。他们改变封面的颜色，平均每10年换一次，他们把目录表放在封面，然后又把它换到封底，然后再换成封面。博亚斯进行一次全新的封面设计（我没采用是为了恢复老式的封面目录表），他还引进“杂著”专栏（有些人不太尊敬地称之为“填空”）。我讨厌各种表，最坏的是一时的表，为此我引进废弃物中心（引起许多吼叫）以及给主编的来信专栏。博亚斯的更新是每年改变封面颜色，其想法是你在你的书架上找到特别的一期时，你需要帮助把各卷分开。我喜欢这个想法，继续采用这个办法。为此，我每年必须花费好几分钟来决定下一年的《月刊》应该是紫色的还是桔红色的。

主编还干什么别的事？一个概括他所有活动的答案是：做出决定。正如在大多数行政工作中一样，你做出什么决定并不重要，重要的是别犹疑不决。下一个3月号，我应该刊出谁的照片，是早早去世的伟大的英国分析学家，还是最近的菲尔兹奖获得者？决策时间：3分钟。另外还需用10分钟来编写照片

的说明文字（吊胃口的提示和谜底）以及向执行编辑口授开头的信，这样我就可以干下一个工作了。为了避免浪费时间，你必须学会毫不动摇地做出决定，做出选择并坚持你的选择。你如果能设法做到这点，许多问题甚至连出也不出现。

人们常常问我，我从哪里得到我的照片？答案是：我请求要它们，我把它们借出来，我偷出来，我买，在很少情况下，我自己拍。埃尔兰根的康拉德·雅各布斯（Konrad Jacobs）有大量的收藏（这是奥伯沃尔法赫的图书馆大规模档案的基础），伯克利的乔治·伯格曼（George Bergman）也有大量的收集。两人对我都很有帮助，另外还有圣·克拉拉的杰里·亚力山大逊（Jerry Alexanderson），他负责波尔亚的一生积累的照片。当我听到有什么好照片后，我就写信去要（有时得到成功），我收藏好我得到的照片，不断地计数。最后计数时，我已经几乎有足够照片供我主编任期内使用；在我之后管他洪水滔天。

《月刊》的主编制订政策，选择封面颜色和照片，尽力平息对副主编的抱怨和不满（有时也出现在他们之间），以及（在罕见的情形）考虑辞退某位副主编。从技术上讲，他既不能雇用副主编，也不能解聘任何人。实际上他只是提名副主编，然后由管理委员会“选”出来，一旦他们被选出来，就稳稳地当上副主编，就像主编本人一样牢靠。如果他们工作干得不好，或者根本不工作，你所能做的只是通过外交手段劝他们辞职。但是，主编最重要的工作，不是政策，不是照片，不是外交，他最重要的头等大事就是发文章。

我强调的是需要论述性的长文章而不是短文。它们的区别在哪里？曾经提出过各种区别——表达方法，统一连贯性——但是我理解的唯一不同是文章长短。一篇手稿不到 8 页就是短文，我就送交一位处理短文的编辑处理；而比它长的就是长文。

主编的任务就是得到足够多的长文，从它们中选择，不要坏的，编辑好的。

你怎样搞到长文章呢？我试图征集这类文章："你对……无所不知，而且你是一位论述的老手，我能不能劝你同《月刊》的读者分享你的秘密呢？"我不停地试探，但是我的成功率令人沮丧。要是我能从100封征询信中得到3篇文章，我就算自己走运。获得文章的唯一有效的方法似乎是坐等它们寄来。

有许多寄来的稿件不能用。我早先收到的一份不能用的手稿是用了100页来解释代数几何学的一些最新技术，我力图尽可能用外交辞令向作者解释，使他明白他对《月刊》读者的兴趣和背景知识的判断有误。古怪的文章不断给我们寄来，其中大多数甚至还不是那么富有想像力。他们总是回到古代的经典问题：三等分一角，化圆为方，倍立方体（按照多数人关注的程度为序）；而讨论更近代的问题，他们几乎总是选择费尔马大定理。我感到我必须正式答复所有正式的来稿者（但是不必要超过一次）对于那些声称他们解决不可解问题的人，我通常的答复是给他提出关于证明不可解性的参考文献，并且坚持在我找到他们稿子中的错误之前，让他们先找到人家说明中的错误。正是成百页的错误判断，奇思怪想，坚持搞小研究的人们，以及具有完全合理的目标的完全合理的作者偏偏又没打中目标。《月刊》的来稿采用率一直大约是20%左右。

主编最困难的工作是力求得到好的建议。有时我采用的花招是让作者推荐评审者。我会要求作者给我四五个名字，而且告诉他，我并不保证非得用其中任何一位。这样我就会写信给作者所推荐的人，让他们提出进一步的建议。这个过程收敛非常之快，从中涌现出模式，最适宜的评审者的名字似乎就在顶端浮现。我发现了！

我把大多数论文同时送交两位评审者。如果这两位意见一致，那就比较容易作出一个决定。如果他们两位意见不一致，我就会试图在他们之间取得某种合理的妥协；如果这也行不通，再送给第三位审稿人，而且不管怎样，都可以某种方式得出结论——这样就可以把责任推诿掉。要是决定拒登，我就会坚定但圆滑地对作者讲——某些审稿人讲的实属恶毒攻击，把他们的话不搀水原原本本地告诉作者实在没有好处也太不仁慈。要是决定采用，那么我就会或者暂时休息一下，或者继续工作。

一旦稿件决定采用发表，"编辑"一篇论文到底是什么意思？每位编辑都对这个问题有不同的回答。对于某些人来讲，它意味着无穷无尽的细节上的改动：改变字词，改变它们的顺序，改变标点符号。有时它意味着重写这篇文章，或者，文章是用中文或匈牙利文或巴基斯坦文写的，只不过用的英文字，那就要把它"翻译"成为大家可以接受的习惯用法。我做过一些这类工作，但一般我总尽可能多地随作者的便。如果他的文法别具一格但是还清楚或者他的文章还保留着淡淡的日文或葡萄牙文特色，我就随他去了。难道我只是偷懒吗？不，我暗自认为：我只是给作者在他的文章中表现他的个性的机会。

这些会使你对编辑工作有个概念。如果你考虑要成为《月刊》的主编，那你就要明白你去干什么。

这里与那里

研究、教学和服务工作，的确就是这些，但是随着时间过去，它们的混合比也不断变化。当我在布卢明顿教书，特别是培养哲学博士生时，当我做这种或那种事务性服务工作时，我仍然同时从感情上介入研究工作。我不断地发表论文，有些还

不坏。我证明，每个正规算子是埃尔米特算子的连续函数——这是一个多少惊人的结果，而且肯定有用。后来我研究函子Lat，它把每个算子对应成其不变子空间格，并且证明，它在自然的意义之下是上半连续的——这是一个令人满意的结果，但是我们盼望它有应用，直到现在仍然继续企盼着。所有这些研究工作非常可靠而且值得去做，但都不特别惊人。在做这项工作当中，我度过60岁——40年的数学研究——此时此刻我不禁感觉到无论数量和质量都正在降低。我并不感到羞愧，我只是后悔。

我同世界其他部分的数学家的工作仍然保持接触，经常旅行、讲演、开会、传播福音，并从中得到新思想的激励和获得新的能量。奥伯沃尔法赫、帕索斯·德·卡尔达斯（巴西）、圣地亚哥、圣·安德鲁斯、德黑兰、帕斯（西澳大利亚）、布达佩斯——在60年代末乃至整个70年代，我几乎每年都去我觉得有吸引力的地方，而从来不受诱惑对自己已经取得的荣誉心满意足。

不管你是在德国南部还是在苏格兰中部，谈论数学都是一样的，你会见的数学阔佬阶层不会有很多人，特别是当你的报告（正如我们大多数一样）局限于一两个主题的时候。你总是到处偶然碰到同样一些人，谈论同样的定理。在奥伯沃尔法赫，我碰到我以前在密歇根的同事罗恩·道格拉斯，我在圣·安德鲁斯碰到了我以前在芝加哥的同事，欧文·卡普兰斯基。在伊朗，语言听起来很陌生，集市十分喧嚣，多姿多彩，清真寺非常漂亮，没有别的地方像这里一样把镶有华丽镜框的伊朗国王的艳丽彩色照片送给被邀请的报告人。但是无论用波斯语讲还是用葡萄牙语讲，正规算子似乎还是具有相同的性质。在德黑兰，彬彬有礼的孩子们会同我说话，他们说的听起来像“再

见”，这使我感到困惑，于是我友好地说“哈罗”并报以微笑。直到很久以后我才醒过味来，知道他们讲的是波斯语的“你好”。至于伊朗国王的照片，他在相册中放在透明塑料纸的后面，我太太把镜框中他的照片换成我的。

我访问过的两个地方对我来说备感亲切，它们是奥伯沃尔法赫和圣·安德鲁斯，关于这两个地方我想谈几句。

奥伯沃尔法赫在数学家当中十分出名，也的确应该如此。数学研究所位于小山峰上，小山不高但是很徒，你向上走5分钟就会气喘嘘嘘。要到达那里，你首先得飞往法兰克福，然后乘火车，或者，如果想体验自杀的感觉，在高速公路上行车，奔向沃尔凯。它处于山乡之中，在德国南下角，靠近法国和瑞士，长满了高大的，非常非常高大的树木。数学研究所资助为期一周的学术会议，每年开50次会，涉及数学各个领域。我第一次到这里是1968年出席关于“抽象空间和逼近”的学术会议，会议开得很成功，因此从那以后每3年再开1次。我不能每次都参加。但是我的确出席过3次不同的会议，使我感到心情舒畅，数学上也有收获。这个系列会议的组织者是保罗·布茨尔(Paul Butzer）和贝拉·斯-纳吉（Bela Sz. -Nagy)。

1980年的会议多少有点儿典型性，我很高兴回忆它。在8月初的星期六下午我到达那里，星期日早晨10点会议开始。是的，星期天早上。布茨尔是办事能手。我是头一位报告人——这事又好（报告过了就没事了）又坏（时差综合症还没过去）。

数学研究所有一座会议大楼、一座客房大楼，还有两座小房称为孟加拉式平房。会议大楼有一个报告厅，其中可以容纳50到60人舒舒服服地坐在那里，要是超过60人，它就显得拥挤很不舒服。这种设计是有目的的，其想法就是要会议保持足够小，好让与会的人真正互相见面和交谈。会议大楼还有一个

休息室，一个很小但是惊人有效率的数学图书馆，一个台球桌，一张乒乓台，一个酒窖，而且在大楼里很容易喝到咖啡。会议大楼距客房大楼和两座平房小屋各有20步远。图书馆收藏的数学家照片最为丰富。埃尔兰根的康拉德·雅各布斯是位伟大的摄影家，也是超级系统收藏家，他建立了这个收藏，并加以照管。

客房卧室不大，像隐修院一样简朴，十分适用。也有少数双人房间，但是在大多数情形下，人们参加会议不带配偶，住在单间。一个典型小屋中的家具包括：一张又硬又窄的小床，两把椅子，一张桌子上有台灯，一张长凳，它足够大可以把一个打开的大皮箱放在上面。

早、中、晚都在客房大楼的一层餐厅里用餐。烹调技术不能说让人叫绝，但还过得去。早餐是面包、果酱和火腿，大约12点半吃主餐，欧洲式的，大约3点半用茶点（糕饼和德国大蛋糕），6点半吃晚餐，晚餐不丰盛。在奥伯瓦尔法赫就餐的一大特色是随机餐巾系统，每位客人发给一条布餐巾，上面有他的名字，当餐桌6个人都安置好，餐巾就打乱随机地放在某个桌子上。在你要准备坐下就餐时，你必须在餐厅里转一两分钟去找你的餐巾，其结果就是你不知道你会同哪5位在一桌共同进餐。其结果就是不鼓励人们抱团，而鼓励互相结识。这个办法很有效。

在餐厅旁边有个自助酒吧。其中提供啤酒、果酒、白兰地以及几种调酒饮料。付款采用无人监督的信用制度，或者你把钱放在烟盒当中，或者你签收你的消费以后再付款。酒吧在晚餐之前生意兴隆，而在晚餐之后很久也一样，这时有许多显然是具有无穷无尽精力的年轻人。在酒吧里聊天通常要持续到凌晨两点，但持续到凌晨6点就比较罕见，不过也不是没有听说

过。

一次会议要开整整6天，外带半天外出旅游。每一整天都有8个预先安排好的报告，而在进餐当中，散步当中，喝茶饮酒当中，没有预先安排的交流也在全力进行。在奥伯沃尔法赫，你努力工作，而且你有很多机会好好玩，其中包括到山上散步。在地板上画有国际象棋棋盘，棋盘格子有一英尺见方，棋子有2英尺高，还有许多副纸牌供你玩。旅游你也可以选择：你可以去天主教堂，或者去卡西洛赌场或者三星级法国餐馆。

在这些设施中如果没有你喜欢的，你也可以有机会在“愿望本”(Wunsch Buch)（也称为意见本）中表达你的不满。翻翻这意见本看看缺什么也挺有意思。人们抱怨没有更干的（没甜味或果味的）果酒，没有削铅笔刀，没有更好的手纸，没有瑞典式精算日志，没有带他们上山的电火车，没有宣传数学研究所的T恤衫，没有调好音的钢琴。

1980年会议的参加者包含来自世界许多地方的代表：从保加利亚来的伊利耶夫(Iliev)，从荷兰来的查南(Zaanen)，从匈牙利来的萨巴多什(Szabados)，从比利时来的卢默(Lumer)，从日本来的安藤(Ando)，从以色列来的米尔曼(Milman)，当然还有来自德国和美国的人数众多的代表团。其中最使我感兴趣的是米尔曼——对，就是那个米尔曼，大卫·米尔曼，以克赖因-米尔曼定理而著称的米尔曼。当时他已经快70岁了，他喜欢回忆过去。他放弃了他在敖德萨的家，他的语言，他的文化，移居以色列。在以色列他学习希伯莱语和英语。确切地说，他学的是一种$\frac{1}{3}$英语，他会他所需要的字的$\frac{1}{3}$，也就是前一两个音节，但是他能用它表达得不错。他完全秃顶了，有一双淡蓝色的眼睛，咽里一半是补的牙、一半是假牙使他的嘴成为各色

各样金属奇特的组合。他把他过去的俄国大多数同事都说成是古怪的人，他明确对我讲，盖尔范德十分古怪，是位大数学家但是很古怪；柯尔莫哥洛夫也很古怪，大数学家但很古怪；希洛大很古怪，拉伊科夫（Raikov）很奇怪。克赖因？——不，克赖因可不古怪。（我不赞成但没吭声。）



D·米尔曼和P·R·哈尔莫斯，1980年

奥伯沃尔法赫的会议上，正式语言通常是英语——很难再找一种语言可以使日本人和保加利亚人彼此交流。当然也有人用德语，但是惊人的少，我试图尽我所能再学习更多的德语，我非常感激贝伦斯（Berens），他曾在美国呆了很长一段时期，特别是在圣·巴巴拉，他能够讲一口流利的、正确的、地地道道的美国口语。然而，他却选择用德语做报告，他告诉我，他不打算放弃100％的语言控制。我赞成他的决定。他尽力发音甚至

比平时更清楚，我觉得我只需再花费很少一点力气去听德语，就可以使我对数学的理解不是更难而是更容易了。

在谈到语言时，我知道德文“Zorn”的意思是“气愤”或“生气”。罗马历史学家塔西佗（Tacitus）有一次讲起，他记下事件“Sine ira et studio”大致意思是“无气无偏”。对他这句话的可能德文翻译是“Blick Zuruck Ohne Zorn”，翻成英语就是“没有怒气地回顾过去”。可是这个德语短语有时被咬文嚼字的数学家使用，表示在一个证明中不需要用选择公理，而选择公理正好是逻辑等价于佐恩（Zorn）引理。

在奥伯沃尔法赫6天半的日子里，我需要用到我会的超过两个字的所有语言——英语、法语（甚至法语！）、德语、匈牙利语、俄语、西班牙语，我还会用其他语言——希腊语、希伯莱语、日语——如果我以前学会的话。其实如果只是为了应付日常事务，英语已基本够用，但是加上一点额外的语言总是有好处。

星期四晚上在酒会之后有一个问题讨论会。酒会是一周最后一次正式社交活动。祝酒，致感谢词，告别演说。星期五仍然是一整天工作日，但工作显然松弛下来。大多数人星期六一大早就离开去赶火车赶飞机，星期五晚上的社交活动就不那么热闹了。星期六最后的告别在餐厅进行，那时椅子倒放在餐桌上，到处是提桶和拖把，——期待着那天下午下一批人的来临。

圣·安德鲁斯的会议是完全不同的一类。它没有那么出名，也没有那么具有国际性，也不是那么只是集中在一个主题上。它的规模一般要大一些，会期要长一些，其目的主要是促进交流而不是扩大人际交往。

圣·安德鲁斯是一个小市镇（现在人口大约12 000人），在爱丁堡东北35英里，面对北海。圣·安德鲁斯大学是苏格兰最

古老的大学，在整个英国，它是第三古老的大学，创建于15世纪初。

我总是喜欢苏格兰。我喜欢当地人民以及他们谈话的方式；我喜欢乡间景色，啤酒，羊群甚至气候。的确，从12月到3月没有白天，而且下雨很多，但是春天是激动人心地漂亮，雨也是毛毛细雨不会打湿你的衣服，更不会使你心情沮丧。当我1972年在苏格兰时，夏天最热的日子是在7月中，温度达到22.8℃。

每4年一次，确切说在闰年，爱丁堡数学会在圣·安德鲁斯举行一次讨论会。1970年11月，我收到亚瑟·爱尔台里代表1972年讨论会计划委员会给我的一封正式信函，问我是否愿意做一个六到七次演讲的系列报告。荣誉，有，酬金，没有；旅行开支——我们尽可能通过科学研究委员会安排；我们将提供这10天的食宿。我去吗？我要去那里！我回信表示接受而且准时到达，做报告，享受在那里的分分秒秒。

在讨论会上我结识了一些新朋友，也碰到了一些老朋友。汤姆·布莱特（Tom Blyth）是圣·安德鲁斯大学系里的年轻成员，他负责安排当地的会议事务，而且完成任务很出色。他要应付三位主讲人［F·哈拉里（Harary）、S·瓦伊达（Vajda）和我］以及大约150位其他人。哈拉里讲的是图论，瓦伊达讲数学规划，我讲线性代数和算子理论的关系，难道还能讲别的吗？圣·安德鲁斯大学数学系主任约翰·霍伊（John Howie）招待殷勤，很有效率，令人愉快。保尔·柯恩（Paul Cohn）和吉姆·伊尔斯（Jim Eells）分别负责下午的代数讨论班和大范围分析讨论班，这样在上午的报告会之后，把一天的日程填满。

大部分时间我都同弗兰克·史密西斯（Frank Smithies）和诺拉·史密西斯（Nora Smithies）在一起度过。弗兰克可以称

为是英国泛函分析之父（祖父?)。他一生大部分是在剑桥度过的，他的学生以及学生的学生在英国占有许多有影响的职位。他是位令人高兴的人，同他在一起总是非常愉快。他懂得诗歌、历史、语言，当然还有数学；他具有眼光、智慧和机智；他讲话轻柔，十分精密，在正餐前他总喜欢喝上一两杯雪莉酒，他总是吸烟。

显然，参加讨论会的并不都是英国人，但是，大多数人的确是英国人。事实上据我记忆所及，他们中大多数不是苏格兰人就是在苏格兰居住。许多谈话都是在研究水平上进行，但是讨论会的主要目的似乎是论说性的：打开一扇窗户让阳光照进来。大多数成员都是工作勤奋的教师，在学年之中，他们没有多少机会彼此会面，而且没有足够的时间同数学的发展保持接触。圣·安德鲁斯讨论会使得他们之间彼此接触，而且同世界其他地方的一些数学家接触，这种接触是以有吸引力而没有压力的方式进行的。他们带来他们的高尔夫球杆，或者他们的小提琴，或者都带着，到这里充分利用专业的休闲设施。

每天的日程与奥伯沃尔法赫的明显不同。丰盛的早餐之后的3个报告分别在9：15、10：30(在半小时喝咖啡休息之后)、12时举行。午餐过后，你可以打个盹或者工作或者打高尔夫球，直到4点用茶。讨论班从4：30到大约6点，它们都是（由主办者）临时安排的：明天你是否愿意在代数讨论班上讲点什么？

至于谈到休闲娱乐，当然会有国际象棋和纸牌，更多的当然是高尔夫球；网球场和有墙围起的网球场以及乒乓球台子都很容易找到。在7点钟开的晚餐之后，晚上不再安排什么专业的活动。你可以同你的朋友聊天，或者去看电影，或者参加已经安排好的文娱活动。有一晚上是音乐会（自演)，有一晚上有到市里剧院看戏的票，还有一个晚上是桥牌比赛，还有一晚上



F·史密西斯，1968年

看苏格兰乡村舞蹈，还有一晚上是管风琴独奏会。正如奥伯沃尔法赫一样，有一个漫长的半天省下来组织旅游；同奥伯沃尔法赫不一样的是，星期天完全自由活动。

圣·安德鲁斯讨论会是一个严肃的数学集会，但是同时也是节假日。它是数学的假期。第一次去我就喜欢上它，从那次以后，每一次开会我都再回去，我计划在我有生之年中的闰年我一直要参加下去。

怎样写数学

这方面我没有计划，但是在60年代，特别是接近60年代末和整个70年代，我的主要精力放在写作综述和论说文章上面。它们之间有差别，不是吗？综述更像是在研究水平上有组织地对专家或接近专家水平的人讲述他们可能忽略的材料。而论说文并不要求读者专精那一门，而是让他们不太花力气就能懂，其目的是表明，为什么要进行一项严肃的学习，如何开始。换句话说，论说文的主要目的是为了吸引读者和叙述内容而不是说明解释和教导。我早期（1944年）关于概率基础的文章就是论说文，而数学科学会议委员会的报告（1970年），关于希尔伯特空间的10个问题则构成一个综述。

1956年，在我狂热爱上多演代数的高潮中，我发表一篇论说文，题目是“代数逻辑的基本概念”，因为当时的时代潮流推动我写这篇文章，我倾向于当一名传教士。1963年我回到算子理论时，我发表一篇综述，题为“希尔伯特空间一瞥”。因为汤姆·萨蒂（Tom Saaty）（当时海军研究局）组织一系列报告，写好后汇集成册，给那些在下面准备攀登陡峰的人一个由顶峰上观看的图景。他肯定需要的是综述，在研究的水平上的论述。我在我们开始通讯时，告诉他我的报告题目，他感到不安。“一瞥”他听起来似乎太容易、太轻松、水平太低。我猜测，他怀疑我试图绕过困难走条捷径。

综述非常难写，但是好的论说文，更加难写得多，水平越低越难写。真正使我成为一名有成就的半职业的论说和综述的作者的分水岭是1967年，来自母校的邀请。伊利诺伊大学快到百年校庆，我被邀请在百年校庆纪念会上给“普通”听众做报

告。我能够谈些什么？除了数学之外，我什么也不知道，我怎么可能对“普通”听众谈数学呢？我当时对这个问题的答案肯定与我现在的答案不同。现在我会让听众积极起来，向他们提出挑战，使他们考虑我“指定”的问题。而在当时，我所能想到的只不过是销售花卉的宣传，或者用一个或许是更好的隐喻，是一种布道。我并没有用地狱之火去吓唬世俗群众（意思是非数学家的普通人），但是，我试图用壮美的颜色描绘数学的天堂，把数学描绘为一种艺术，一种创造性的艺术，只有看到这种光辉的人才能获得永恒的救赎。这个讲演进行得十分好，至今仍有许多人向我要演讲的重印本。由于我这次令人兴奋的成功，我觉得在其后几年里很难说不。美国数学会是否要编写一本小册子，数学家可以从中学习怎样写得更好？《不列颠百科全书》是否要一篇关于冯·诺伊曼的文章？美国数学协会是否要一份报告，论述第二次世界大战后美国数学的发展？的确——只要让我写，我就会去写。

诺尔曼·斯廷洛德是位令人佩服的极好的人。他是位卓越的拓扑学家，而且也是位可爱的、热心的人，他具有最高的职业道德水准。我们许多人都抱怨，大多数书和论文写得多糟；诺尔曼想要对此干点事。在他的命令下，美国数学会任命一个委员会（当然，由他任主席），“目的是写一本小册子，论述在研究水平上和在研究生教材水平上书和论文的论说性写作。”除了斯廷洛德之外，委员会还包括狄奥东涅、门纳姆·希弗和我。

我是在 1969 年被任命的，一年多一点之后，1970 年 6 月，我写信给安布洛斯，内容如下：

斯廷洛德是意志坚强的人，有钢铁般生硬的原则、又像浇灌水泥那样有顺应性，风格像豪猪一样典雅。狄奥多



N·E·斯廷洛德，1938 年

涅尽管是位高傲的法国人，还是个好人，但是我对他关于论述文的思想并不是强烈反对而只是不同意。同时他是位大学院长，一个星期写两本半书，在即将召开的（尼斯）大会上，他是位主要旗手。这样一来，他太忙了顾不上给一个愚蠢的委员会写信。希弗可能在委员会中起作用，因为他懂得一些所谓应用数学，但是我认为他不懂英语。至于我，我是一位高傲的无所不知的人，有一次我查字典，查“合作”的意思，然后我就把字典扔了。经过两个月参加委

> 员会的二作，我判定整个事情毫无希望。我辞职不干，开始自己干委员会原本打算干的写作任务。我写完了一个小册子《怎样写数学》，只是正如我在序言中指出的，它实际上是一本日记，应该在书名加上“我”。不管怎样，我写出来了。不少人（可能有几十位）读过它，也提出批评，在我读过他们的建议和意见之后，我什么也没有采纳。理由：他们告诉我，你要讲X就得讲一X，讲Y就讲Y的正交补，你得同时讲Y和负Y。我对此只能说，见鬼去吧，决定照原样一字不改地发表。

这是一个相当令人不快的总结，它甚至没有把所有事实总结进去。斯廷洛德对他的计划费了很多心血，他还有个可怕的委员会要与他一起工作。对我的“辞职”他并没太多在意，他只是从容地处理这件事，事实上他拒绝接受我的辞职。的确，我为他的拒绝铺平了道路。我的信包含下面的计划。

> 我作为一名个人，我将继续考虑我对于论说文的论说。如果，当我完成我的论述时，委员会也完成了，特别是如果委员会的工作成果是不相关的论文汇集，而且如果在此之外把我的论文加进去，那我很高兴它们一起汇集出版。但是，如果我们完成的时间不同，如果你们的成果不是个人论文的汇编，而是像一本手册那样更为正式更为统一，或者像美国数学会体例指南那样针对所有人的规范，那我就把我的论著另行投寄出版。

原来斯廷洛德希望我们搞出一本《圣经》，至少也应该是数学写作的“斯创克和怀特”(Strunk and White)。他希望写一本

内容统一的书，所有事都说得面面俱到，而不是4篇分开的论文。但他的委员会不能按他的方式办，这使他很难过。1970年末，他写信给我。

> 我上封给论说写作委员会的信（1969年11月）要求对我们的初始论文进行一轮批评。你马上回答，我的要求毫无用处。对这事的评价，你肯定是正确的，狄奥多涅和希弗两人都没回信。这使我极为失望。我花费很大力气写这封信；自以为信中提出尖锐批评的份量正好适度，它足以鼓舞干劲，而不致伤害大家。它完全失败了……因此，除了几篇独立的论文之外，我对委员会还能做出什么其他成果不抱任何希望。

斯廷洛德在1971年去世。他自己的论文接近完成，剩下的工作只是“完成最后几页，把语句、语法等等整理干净。”这段引文引自他的遗孀卡洛琳（Carolyn）寄给我的信。诺尔曼要她完成这项任务。她说，他在医院里干的最后工作就是口授论文给她。

他的行文和语法都非常好。我必须做出的一些改正都是属于编辑方面的平凡工作。这是为了保护整个文章行文流畅和统一，是在一些接合点处必须要加以润色的。我还接到希弗的论文，并从狄奥多涅给斯廷洛德的信加以改编使之看来像一篇文章。我自己的论文（在每个人的同意之下）已于1970年在《数学教育》上发表。我把这篇论文加在其他文章之中，给美国数学会委员会写一份报告充当序言，这项工作就算完成了。包含

全部这些文章的小册子在 1978 年[①] 出版，书名是《怎样写数学》。

怎样写冯·诺伊曼

就在斯廷洛德计划仍在进行当中，《不列颠百科全书》的计划开始启动，它听起来很简单：你愿不愿意写一个条目，1000 字，关于冯·诺伊曼的？当然，为什么不呢？唯一的问题是，我对于 1000 字究竟有多少毫无体会。

就像我平时干工作一样，我开始干起这项工作。第一步就是坐下来开始以一种完全杂乱的、没有条理的方式来写。在一张我爱用的黄色的 $8\frac{1}{2}\times 11$ 英寸的纸上，我写出一串不相关连的词，为的是使我想起我要讲的一些题目；在另外一张纸上，我列出可能要查阅的文献清单（讣文，私人通讯，早期的综述文章），又在另一张纸上列出全文的可能的大纲。两个小时的工作写出二十几张纸，现在这项工作可以着手干了。

第二步是文献查找和阅读，我去查阅我已经想到的文献，记笔记，再查找这些文献中引用的文献。我在图书馆追踪脚注和《数学评论》的参考文献（在每一步写下简单的笔记），而在以前的《不列颠百科全书》的传记中，寻找可能仿效的模式。这一部分工作用了我两个月时间，它不得不挤进正规的日常工作的安排之中。随着工作的进行，我不断对在午餐或下午喝茶时碰到的每一个人提到这事，并急切地把我听到的建议和意见（“你会讲关于他开车的故事吗?”）记在午餐收据的背面和用茶

① 原文如此，疑误——译者注。

的餐巾上。

文字上的交流（不管写作的成果是长篇小说，短篇的传记，研究论文还是做樱桃排的配方），最困难的技术问题是它是按照直线顺序展开的，而我们通常接受宇宙信息的方式是多维的。我们是同时通过多种感觉收到的信号来认识某个事物或某个人的。我们的平衡感觉告诉我们一件事，我们肌肉伸长的感觉又告诉我们另一件事。我们看见它，听到它，感觉到它，闻到它，尝到它；我们感到它冷或暖，干或湿。演讲者使用适当的词语，但同时还要控制他讲话的速度和声音的大小；他的面部表情，他的手势，他的声调都是表达的组成部分。口头通讯最高度提练的形式是写作。一个作家仅有的素材就是他的词汇，而把这些词汇按照“全序”（线性完全顺序）表现出来，就是他想要达到某种效果的唯一办法。

我在玩一种复杂的单人游戏时，就会碰到这种排序问题。第一步就要把我已经积累的所有材料（黄色单页纸、书、抽印本、餐巾）转写到3×5纸片上，写成提示性短句的形式，每句话有五六个字。当然，这种纸片的数量与其涵盖的资料数量成正比，一般在25张到100张之间。（我是讲一次把几个印刷页上的材料加以排序的问题，从整体上把许多节加以排序汇集成书的问题也用类似的方法解决。）有了一大叠纸片在手中，我坐在一张擦干净的桌子旁，开始把它们分放成五六堆。对于堆的分法我没有什么成见——我想让每个主题决定它自己的组织。我记得，对于冯·诺伊曼这篇文章，我分成五堆大致对应他的早年生活、学术生涯、数学、战争和去世。这个过程并不是自动的。有些纸条就似乎不属于任何一堆（极端措施：把它扔掉）；有时不同的选择同样可取并且（长期担心）十分可能更为可取；在同一堆内排列纸条的顺序问题以及各堆的排序问题仍然需要面对。

一旦纸条整理成序，写作本身就可以开始。顺序也可能改变——在一个句子当中可能突然出现局部组织的新的眼光——但是变化一般不太可能很大，对我来说，真正去写第一稿通常十分顺利。在我的书桌上，总是打开着《美国传统词典》和《罗热词库》，我经常查阅它们。除此之外，我就一直写下去，写到开头。是的，我是这么说的，开头。不仅做为一个整体的全文，而且其中每一部分（例如这书中的每一节）都应该有一个适当的开头和一个适当的结尾，我写它们的方法是按照另外一种顺序。在我写的时候，我对结尾深思熟虑，力图在一个明快的上升处结束，但是我对开场白思考得更多。一旦这一节（或者整篇论文，或者整本书）完成，我整个读一遍，然后才写（重写）开头。对于一小节，开场白可能只是一段，甚至只是一句话，但是它是极为重要的。为了写好它，我必须对于它所引导的全部结构有一种体会和感受。

我打断工作去查《词典》和《词库》，通常并不是查粗略意义下它的意思［什么是“Oppugn”（质疑）的正确用法］，而是去查精确意义，去找正好是正确的词。当我描述莱夫谢兹的手写体（本书115页上部），我应该称之为“Wiggly”（扭动）还是称为“Wiggly”（扭曲）？冯·诺伊曼和我造出对移位的共轭性猜想的例子，我应该用什么词：这些例子与这个猜想矛盾，抵触或者否认、反对、推翻、驳回、放弃、批驳这个猜想（本书309页）？（从《罗热》找到我要的这种词有25个。）当我查找和权衡时，写作可能停止10到15分钟。

除了“双”词之外，拼写并不使我担心。“letdown”（减低高度）是一个词还是两个词？是否当中应该有一连字符？至于“high school”（中学）、“grown up”（成人）、“look review”（书评）、“by-pass”（旁道）、“pay off”（发薪）等词又如何呢？这

个问题并不重要，也不深奥。但是，不统一很不好。我倒不在乎同词典作对，只要我有充分的理由，但是，如果没有正当理由的话，我还是靠查字典来让我自己拿主意。

回到关于冯·诺伊曼的论文：最终我把它写成，计数，修订，再计数，总计大约7000字。我不感到吃惊或者仓皇失措，这我早就预料到。于是我加以删削、压缩、调整、节短，或者干脆就砍掉，我发现很容易把这7000字的文章转成内容丰富、通俗易懂的正好998字的文章。

现在我有两篇文章，一篇长，一篇短。哪一篇我都不愿意丢掉。解决办法（完全光明正大的，同有关各方面都达成一致）：我把长文投寄给《月刊》而把短文投寄给《不列颠百科全书》。但是，《不列颠百科全书》对我的投稿加以“改进”，实际上进行的是文法上糟糕、数学上无知的编辑加工。这种改进，在我看来，就显得像是成批生产的，机械的，平庸沉闷而乏味。

举例说，看我写的第一段：

> 约翰·冯·诺伊曼是位卓越的数学家，他对于量子物理学，对于逻辑，对于气象学，对于战争，对于高速计算机的理论和应用，并通过战略对策的数学理论对于经济学都做出了重大贡献。

《不列颠百科全书》把原稿改成像下面这样。

> 作为数学家，约翰·冯·诺伊曼对于量子物理学，逻辑和气象学等科学做出重大贡献，它们在国防以及发展高速计算机上具有实际应用。他的战略对策和数学理论对于经济学有显著的影响。

你看出两者之间的差别没有？我讲的是“战争”，他们（那些无处不在的恶毒的他们）却讲“国防”。更有甚者，他们居然讲，量子物理学、逻辑和气象学对它有实际应用。它们有用，是真的吗？我讲“理论和应用”，他们改成“发展”，难道这更正确吗？更容易懂吗？至于“显著的”，我很遗憾现在许多人都把这个词看成是“重要的”或“有价值的”的同义词，但是我是不是非得这么用呢？我想它的意思是“有重大意义的”(meaningful)，当别人告诉我某某人做了意义重大的讲演或画了一张“含义深长的”画时，我就要问这个演讲或画表示什么意义。至于“影响”，这倒是真的！

我写的是：“基本的眼光是无穷维欧氏空间中向量的几何与量子力学系统的态的结构具有相同的形式性质。”他们改为：“他对向量有一种基本的眼光，无穷维欧氏空间中向量的几何与量子力学系统的态的结构有相同的数学特征。

谈到冯·诺伊曼关于“算子环”的论文，我写道：“这篇论文十分可能是使他名垂青史的工作中最长的一篇。”他们改为：“在他的所有工作中，十分可能这些概念能被记忆的时间最长。”我写道：“算子环的一个惊人的副产物是‘连续几何学’”，他们把“惊人的”改为“重要的”。他们还加了一句话：“到目前为止，数学只是用整数来表示给定的空间。”结论：谁要是一点也不懂某一学科的语言如何运用，谁就不应该去写它。

我最后一句话是墓志铭：“他的见识是使人大开眼界，他的论述是严谨明确。”他们把第二个“是”删去。这也算一个改进？

《不列颠百科全书》的改稿不比我的短，不比我更清楚，不比我更好；他们改变了（我相信他们糟踏了）我的文章的清彻和诗味。接着是言词尖刻的通讯。我提出收回我的1000字原稿，

退还稿费。最后的妥协方案是，他们最终使用他们的改稿，但是，在我的一再坚持下，不署上我的名字。他们发表了他们的文章，我保有了我的名声。我想他们的品味真是异乎寻常的糟，而且他们认为我异乎寻常地爱挑剔，难以讨好。

怎样写历史？

1976年在圣·安东尼奥的冬季会议上，为庆祝美国200年国庆，美国数学协会安排了一系列历史性讲演，目的是全面叙述美国数学的发展。伦尼·吉尔曼（Lenny Gillman）担任计划委员会主席，他邀请我准备最近一段时期即最近35年或更长一点时间内的美国数学进展情况的材料。我当时没有马上答应，但是也没有磨蹭很长时间。吉尔曼跟我谈过之后，我要求给我一个月时间好好想想，可是3天之后我就打电话给他表示同意。

我知道，这个任务我不能单干。我花了3天时间问一组同事，问他们是否愿意同我合作。当5位表示同意之后，我感到踏实了，并着手和大家一起工作。这5位是约翰·尤恩、比尔·古斯塔夫森，休尔·穆尔加夫卡尔（Suresh Moolgavkar），比尔·惠勒（Bill Wheeler）和比尔·齐默尔（Bill Ziemer）。我希望，我们合在一起对数学就知道足够多以至能对35年来可能发生的任何事情说点什么。

我们应该讲什么？我们怎么样讲述？我们聚在一起，有时是全体，更经常是三三两两，讨论各种可能的讲法。我们是否应该谈论硬邦邦的事实，例如《数学评论》的惊人增长？我们是否应谈那些数学家的生平，他们使美国成为世界领先的数学大国？我们是否应当集中于文献目录，准备论文和书籍的清单，任何人只要他愿意就能从中了解到全部实情？这些是我们的一

些选择。在我们报告的每一段中，对这些以及其他一些事项进行叙述，然后继续写道。

> 我们决定不谈任何这类事情，而是相反，尽可能地多谈数学，当今活生生的数学。为了在指定的时空边界之内谈数学，我们按照传统的“战斗和国王”的历史体例来叙述。我们力图叙述 1940 年以来美国数学的一些主要胜利，举出胜利者的名字，我们希望附加上足够的说明，（但这只是为了）指明谁是敌手。这些描述通常只到命题为止。我们省去所有的证明，但有时给出一个简短的概要以表明证明的大致路线。这个概要可能只是一句话，也可能两三段，其目的主要是启发性的而不是让人信服。

“战斗和国王”全都不错，但是写哪些战斗，写哪些国王呢？还有，顺便提一句，我们怎样称呼我们写的东西呢，也就是在我们清单的开头，我们得放上什么题目呢？这最后的问题最容易回答。稍加讨论之后，我们就列出三个题目，其中最受欢迎的是“美国数学——从 1940 年到前天”。在经过更多的讨论之后，我拟就 32 个可用题目的清单，我们最后的清单就会由这 32 个题目中选取，每个题目都伴随与此课题有关数学家的名字。例子：

不变子空间［阿隆萨延、伯恩斯坦、伯林（Beurling），罗莫诺索夫、罗宾逊、斯密司］；

模型论［阿克斯（Ax）、柯钦（Kochen）、鲁宾逊、塔尔斯基］；

傅立叶级数（卡尔森）；

函数的叠代（柯尔莫哥洛夫）；

素数定理（爱多什、塞尔伯格）。

我们投票，我们指定数学的权重，我们争论。最终我们确定10个主题。它们是“连续统假设、丢番图方程、单群、奇点解消、韦伊猜想、李群、庞加莱猜想、怪球、微分方程和指标定理。每一主题指定由我们之中一人撰写，他负责写第一稿。然后这些第一稿在我们之间传阅，提出批评，再加以修正，最后它们集中在我的办公桌上。我是主笔。我准备整篇文章的草稿，这是我曾经干过的或者曾想干的最为艰难的工作。

对于连续统假设和李群我懂得一点，对于其他一些主题，我也能理解其大部分语言和思想，而剩下的主题，我可以说完全高度无知。主要想法是向广大听众——美国数学协会会员和《美国数学月刊》的读者——解释最新进展，而他们之中大多数人可能像我一样无知。我激发我的同事向我解释这些主题，让我能够对这些主题有一些理解，足以使我所学到的东西能传播给我的那些无知的听众。它成功了，不管怎样这事成了。阿蒂亚-辛格指标定理对我来说是最难克服的难关，但是，不管怎样，我们也把它攻克了［的确，在它印出之后，辛格告诫我，内容并不十分正确——与黎曼-洛赫（Roch）定理的关系不清楚，或许甚至陈述有误。但就是这样，我感到我和我那些无知的听众的确学了一点我们以前不知道但是又值得学习的东西。］我的草稿也被传阅、被批评，而且加以修订，下一步就是整个过程收敛到它的极限。

我从我们的10个主题中选出一个子集，它足够小仅可供一小时讲演。于是在圣·安东尼奥的会议上，我向据称是1776年人民的听众宣讲了这个子集。然后我长舒几口气，跑到外面喝上几杯啤酒。我的演讲所根据的是我的“最后”定稿，其中有两句话是关于S^n的广义庞加莱猜想的：“斯套凌斯（Stallings）

(1960) 对于 n>7 的情形，齐曼 (Zeeman) (1961) 对于 n=5，n=6 的情形得到了证明。同时斯梅尔 (Smale) (1961) 使用完全不同的技术，对 n≥5 所有情形给出一个证明”。我长舒几口气实在是太早了，几天之后我收到了一封措辞十分强硬的（攻击性的？好斗的？爱争吵的？脾气很坏的？咄咄逼人的？）信，它是斯蒂夫·斯梅尔 (Steve Smale) 寄给我的。其中谈到，我在演讲中给出的是“大大歪曲的图景”以及我对他造成了巨大的“伤害”。

于是，我对此进行了调查研究。我发现，的确我强调的重点完全是错误的，上面两句冒犯的话改成为这样两句话：“证明是斯梅尔在 1960 年得到的。不久，在听说斯梅尔的成功之后，斯套凌斯对于 n≥7 情形给出另外一个证明 (1960)，而齐曼把它推广到 n=5 和 n=6 的情形 (1961)。”这个错误是我犯的，我做了修改。我写信给斯梅尔告诉他这种情况。但是，我无法使我的信避而不谈这件听起来痛苦的事。如果斯梅尔写一封比较客气的信，我也会做同样的修改，感觉就要好得多了。到此时，最终该是我真正舒一口气的时候了。

我们 6 位合作者，把我们的文章投寄给《美国数学月刊》，几乎马上，编辑阿列克斯·罗森堡就给我回了信。

> 这封信确认已收到尤恩等人写的文章。……我已读过这篇论文，而且真正十分喜欢它，因此接受这篇文章在《月刊》上刊登。

第二天，我写信给阿列克斯：

> 你给我们愉快的 6 天（我们 6 人，尤恩、古斯塔夫森、

哈尔莫斯、穆尔加夫卡尔、惠勒、齐默尔，每个人一天），给约翰·尤恩的一天特别美好，他非常高兴把作者写成为尤恩等人。

尾声　怎样作数学家

学会生活要花很长时间——到那时候你知道你的时光已经过去。我花费我--生大部分时光试图当一位数学家，可是我学会了什么呢？当数学家要做什么？我认为我知道答案：你必须生下来就对头，你必须连续不断地追求使自己变得完美，你必须热爱数学超过任何其他事情。你必须不停地勤奋工作，你必须坚持不懈，永不放弃。

生下来就对头？是的。要当数学学者你必须生下来就有天才，具有洞察力、集中力，运气，驱动力，以及直观和猜测的能力。如果你搞教学，你还得理解学生在他们面前会遇到什么困难，你必须同情你的听众，无私地奉献，你必须具有口语表达能力，清晰的风格，论述的技巧。最后，如果你担任重要的行政管理职务，还必须能够全力以赴地做好本职工作，你必须负责、尽职、谨慎、有条理，假如你具有一些领导品质和个人魅力，那就更有好处。

你不可能十全十美。但是，你要是不力图去做到完美，你就不会做得足够好。

当一位数学家，你要热爱数学超过爱你的家庭、宗教、金钱、舒适、快乐和荣耀。我的意思不是爱数学要爱到排斥家庭、宗教和其他的程度，也不是你爱上数学，你就不会有任何怀疑，

从来也不沮丧，也不准备停下工作去干干园艺活。怀疑和沮丧都是生活的组成部分。伟大数学家也有过疑惑，也有过沮丧，但是，一般这并不能使他们停下来不干数学，一旦他不做数学，他会深深地想念它。

的确，“数学家”这个词并没有什么明确的定义。也可能有些人所说的数学家现在（或从来）并没有（或没有过）那么深地热爱数学。你的爱人如果不喜欢数学，你可能要求你给她同样的时间和她在一起；你作为父母可能在良心上有一种对小孩的负罪感，这会使你在星期六下午同你的孩子一起玩游戏而不是为解一个难以捉摸的问题而大伤脑筋。家庭、宗教、金钱、舒适、荣誉以及生活上的其他召唤，不管是深刻的还是平凡的都在不同程度上存在于我们所有人当中，我不是说，数学家可以总对它们不管不顾。我也不是说，热爱数学比热爱其他事物更为重要，我的意思是说，如果把一个人的爱好排成顺序的话，数学家的最大爱好就是数学（我总是愿意在这个意义下使用数学家这个词的）。我认识许多数学家，有大数学家有小数学家，我的确感到，我所讲的对他们都成立。我愿举出一些最著名数学家的名字：马斯登·莫尔斯、安德烈·韦伊、赫尔曼·外尔、奥斯卡·扎里斯基，如果他们不同意我的意见，我会十分吃惊。

请你注意，我不是向你推荐或者坚持要你热爱数学。我也不安排一个顺序。如果说，“如果你想当个数学家，应从热爱数学开始做起，”这可是极为荒谬的。我只是讲，热爱数学是一个前提，没有这点就得不出那个结论。如果你想当一个数学家，你就要审视你的灵魂，问一下你想当数学家的愿望有多大。假如你的愿望不是很深、很大，事实上不是极大、最大；假如你有其他的欲望更为优先，甚至于不止一个，那么你就不该力图当数学家。这个“该”字不是从道德伦理上考虑，而是从实际可

能的角度考虑的。因为我觉得你可能达不到你的目的，而且，无论如何。你总会感到沮丧，感到心情不愉快。

至于谈到干劲十足地勤奋工作，我头一次理解它的含义是卡迈克尔告诉我，他花费多长时间去准备50分钟邀请报告时才懂得的。他说，他用了50个小时，最后报告的每一分钟，他都花上一小时。多年之后，我们6个人写我们的“历史”论文（“美国数学，从1940年到…”）时，我计算过，我个人从事我那份工作就用了150个小时；想到全组人投人多少人-时，我就感到震惊。我只是准备我的讲演（还不是论文）就用了我几个小时。我高声朗读全篇稿子，又对着录音机从头到尾讲了一次，然后，我从头到尾听了6遍——3遍是为了修饰需要修饰的地方（每次放下一遍之前，先把该修饰的地方修改好），另外3次是为了掌握确切的时间（特别是，对于每一部分用多少时间找到一种感觉）。一旦6遍听完，整个演讲都准备得清晰透澈之后，我还要做最后一次彩排（只有我自己，没有听众），把演讲从头到尾再讲一次。这就是工作。

阿基米德教导我们：每次加上很少一点数量往往足以形成巨大数量（或者如谚语所说，集腋成裘）。当你要成就世上的工作，特别是数学家的工作，不管是证明一个定理，写一本书，教一门课，当系主任，还是编一份杂志，我相信应该表述出相反的过程：阿基米德的方法是完成工作唯一方法。干一点，天天不断地、持续地干，没有例外，没有假期。作为例子，我可以举出，我的《希尔伯特空间问题集》的第一版，其中有199个问题，在我在迈阿密工作那年，我写了第一稿的大部分，我强迫我自己，每天非得写一个问题。这并不意味着我用199天写完整本书，写完整本书用了3倍那么长的时间。

由于“从不放弃”，无需解释，我自始至终一直尽力用逸闻

趣事的方式去举例证明它。但是这里讲的，只不过是玩笑，是一个合适的小故事。大约在1980年左右，我被邀请去给“普通”听众做报告，并且做完了。我增补了最新资料并投寄到《数学教师》上发表。终于，我收到了来自几位评审人的报告，它们的大致意思如下：“作者似乎感觉她或他正在举例说明抽象的震颤和力量，虽然她或他的例子中包含了那种潜力，我感觉其表达并没有产生出那种结果…。论文中的许多问题都是属于曲折的样式，思想的演进并不清楚…。集中谈的数学话题也不是特别令人感兴趣。”论文被坚决地拒绝刊载。我没有放弃——我耸了耸肩，并且一字不改地把这同一篇文章投寄到当时刊名为《两年制学院数学杂志》。这篇文章被采用并印刷出来，一年以后，它获得美国数学协会的波利亚奖。

所有这些关于怎样当一名数学家的规定和描述都不可避免地来自我自己想成为一名数学家的尝试。没人能告诉我数学家应该做什么，我也不能完全肯定我知道他们事实上究竟做什么——我真正能说的就是我所做的。

那么我和数学家有多接近呢?我的全部数学贡献是什么?我想到的第一个答案是一个小的但漂亮的证明（单调类定理），几个还不错的定理（主要是我的遍历理论的论文“逼近理论…”和一般来讲保测定理是混合的）和在逻辑中的一个好想法（多演代数）。

我非常擅长的一件事是提出问题。对于一个已知的数学问题，如果我理解它的陈述，如果我懂得一些关于它的历史并且我花过一些时间研究过，如果我可以用标准技巧把它适当地现代化——在这些情况下，我还是有一些才能的，我能确认并且表述中心的问题。如果一个问题我看着很难，用一个月试着去解而没解出来，那么我就相信这个问题不是无足轻重的。我完

全相信，像这样一个问题更适合于比我强的数学家去解决。当他们中间有一个人解决了这个问题，他肯定会感觉到一阵自豪和快乐的激动（例如幂不等式和外尔-冯·诺伊曼正规算子理论）。

与我曾问过的这些问题相关的是我发现和引进的概念。值得注意的是正规算子和拟三角算子，或许还包括巴拿赫代数的容度，由这些概念形成重要的理论，我认为把它们称为贡献是公平的。

我写了几篇好的综述和几本相当好的书，或许最好的是《有限维向量空间》和《希尔伯特空间问题集》——但随后，我对这种事情的赞成或支持或许就是最无足轻重的了。

我最接近不朽的贡献是一个缩写的和印刷的符号，我发明了用“iff”代替“当且仅当”——但我从不相信我真是它的第一个发明者。我有充足的理由去相信，在我发明以前它就存在，但我不知道它的存在，而我对它的发明（再发明?）是使它在数学界广泛传播。这个符号肯定不是我的发明——在我采用它之前，它已经出现在流行杂志（不是数学杂志）上。而我做的是再一次把它引进到数学中来。这是有时看起来像□的符号，并被用作表示一段结束，通常是一个证明的结束。它最经常被叫作“墓碑”，但至少有一个慷慨大度的作者把它称为“哈尔莫斯”。

那就是我，那就是我的生活，那就是我的生涯。按照质量递减的顺序，我是一位作家、一名编辑、一位教师和一位做研究的数学家。

以后该干什么？这本书的写作花费了巨大代价，它用了一年半的时间和精力，其间我无暇顾及研究。它是一个审慎的冒险，我要写这本书，但我一点儿也不能肯定，我能按照我梦想的方式来写它。我没有把握能把我心里要讲的告诉读者。如果

最终我成功了，我会非常高兴，如果不是这样，我会很难过。但无论哪种情况，我都不准备爬进一个洞里并在我后面把门拉上。我愿意写更多的数学、去教更多的数学，甚至去证明一个定理，这只有天晓得。我打算去试试，看自己行不行。我已经思考数学，我已经教数学，我已经写数学，我已经谈论数学达50年之久。我很高兴我这样做了，我要当一名数学家，我仍然要努力。

译后记

哈尔莫斯的数学自传是一本独出心裁、别具一格的“传记”。之所以如此说，是因为你读完整本传记之后，对他的个人生活仍然所知甚少，要不是他在序言中提一下，我们根本不知道他前后有两位太太。读后我们也还不知道他的家庭生活和子女情况，而他 13 岁到美国之前的事也很少谈及。因此，这本书是名副其实的数学自传。

在各界名人中，数学家是最不为人了解，而且其传记恐怕是最为索然无味的。的确，数学家的活动主要在他头脑中进行，而且他的劳动成果往往只有极少数人才能理解，这恐怕也就是为什么一些 20 世纪顶尖的数学家——庞加莱、外尔和冯·诺伊曼等至今还没有一本好的传记问世的缘故。比起伟大的物理学家，这种反差尤其明显。爱因斯坦恐怕有几十种传记，其中至少有上十种是高质量、高水平的。可数学家怎么能同物理学家相比呢？况且，哈尔莫斯也决不能同冯·诺伊曼那样的数学家相提并论。那么，在去掉也许对一般读者有兴趣的生活琐事之后，这本书还能剩下什么可读的呢？

答案是这本书大有可读之处，尤其是它有着大量的任何一本书没有的信息。如果你是位数学工作者，你也许听说过许多数学家，书中至少提到一二百位数学家，有些是鼎鼎大名的，像冯·诺伊曼和柯尔莫哥洛夫。哈尔莫斯不仅讲述他们的故事给

你听，还有他们的照片给你看。对于当代那些第一流数学家真使得你有一个感性认识。

对于一个对历史有兴趣的读者，这真正是一本20世纪数学社会史。在国外，个人工资是个保密的话题，但这本书告诉你，陈省身和韦伊等大数学家在芝加哥的工资，当然还有哈尔莫斯自己从30年代到80年代退休前的工资增长情况，他还告诉你教授间的工资差别。说到这里，我觉得这本书最值得领导干部、搞科学管理和科技政策的人一读。首先它告诉你，美国是如何从一个数学小国变成现在的数学超级大国的，其实这只不过用了50年时间。中国要想强大，其中不乏经验和教训可资借鉴。其次，他指出怎样造成伟大的大学，像芝加哥大学那样，也现身说法说明那些差的大学为什么差，哈尔莫斯的经历使他最有资格讲这个话。他22岁拿到博士学位之后，曾先后在9所大学任教，他还访问过许多国家，从乌拉圭到苏联，他或简单或详细地告诉你数学发展是何等的不平衡，也告诉你许多事情的确事在人为。对于行政管理，他与许多美国人不同，不赞成民主，而赞成一个人说了算。当然他也知道，这位头头应该是位有理想、有抱负、想把事情办好的人。对于数学家成长来说，不是搞什么重点倾斜、择优支持，而在于真正营造一个宽松自由的学术环境。

当然，哈尔莫斯的《我要作数学家》主要还是为了那些想作一个真正数学家的人看的。正如他在尾声中写的，数学家必须爱数学，而且爱数学超过金钱、名誉、舒适、享乐等等。因为只有这样，他才能敬业并且勤奋工作，踏踏实实地诚实劳动。他本人是这样，他周围的许多数学家也是这样。如果数学家只是做研究，那可写的很少，他特别强调的是，数学家还要干许多事，并且要干好。哈尔莫斯这么干了，也基本上干好了。粗略估计，他比一般数学工作者的工作量大10倍以上。他教数学，

指导研究生，特别是培养博士，写过许多各种程度的书［例如《测度论》被译成上10种文字（包括中文），被公认是名著，哈尔莫斯也因此出名，在中国也广为人知］，写介绍性论述和综述（这是费力不讨好的工作，任何数学大国在这方面都很强），写书评，当期刊的编辑，当丛书的编辑，写历史和进展简介，翻译，写百科全书条目。这些可以说是传播性工作，许多数学家不愿干这类工作，但真正的数学家还是去干，因为这是他们事业的有机组成部分。另一部分工作是服务性或行政事务性工作，最主要的就是当系主任。他花了大量篇幅写如何当好系主任，很值得一读。其它工作还有很多，例如写推荐信，他公开披露自己写的一些信，特别是为辛格写的推荐信，的确让他引以为荣，因为辛格恐怕现在是比哈尔莫斯还大的数学家。这恐怕是数学大国的数学大家的气派，否则只能是一代不如一代的瞎糊弄。哈尔莫斯作为著名数学家，当然也有许多机构和个人来征询他的意见和建议，怎样干好这事，他写的也颇有教益。

哈尔莫斯不是一位狭窄领域的专家，他在泛函分析（特别是算子理论）、拓扑群、测度论、遍历理论、代数逻辑、布尔代数理论等方面都有开创性的贡献。同时他对数学的其它领域也保持浓厚的兴趣，对于数学的主要进展十分关注，这显示出他作为一个数学家的地位，远超出狭窄的工匠之上。因为这决定他的对数学的理解和眼光，这在传记的一些章节中有很好的表述，对读者有很大启发。

为了做到这一点，哈尔莫斯进行广泛的交流并且积极参加各种学术会议，特别是4年一次的国际数学家大会和美国数学会的年会，在欧洲也常常留下他的足迹。通过交流他获取大量的信息，而这些从孤立的地方是难以得到的。在这方面，一些政治的插曲也很有趣。早年哈尔莫斯曾一度参加美国共产党，因此50年代初的麦卡锡反共狂潮使他没能出席1954年爱丁堡大

会，还惹了不少麻烦。这些都说明各种阻碍交流的因素对于科学发展是极为不利的。从另一方面来讲，普林斯顿高等研究院的故事，也会使人看到这样一个中心是如何成为大数学家的摇篮的。这些事不仅是数学工作者，而且也是一般的科学工作者都会感兴趣的。

由于本书内容广泛，写法轻松自然，有心的读者都会找到他感兴趣的内容，并获得收益。

这本书写作于80年代，行文比较自由，接近美国口语，翻译起来有一定难度。但是，所有译者都付出巨大的劳动，认真负责地完成各部分的工作。本书共分三大部分。译者是这样分工的：

马元德教授翻译序言和第一部分。他是位著名的翻译家，译著20余部，包括罗素的《西方哲学史》下卷和《量子史话》等等。他的译文几经推敲、成熟老到。在数学方面他感谢沈光宇教授对他的帮助。

沈永欢教授翻译第二部分。他曾在美国访问4年，对美国大学数学情况十分了解。他的译著颇丰，他是《岩波数学辞典》和5卷本《数学百科全书》的主要翻译者和审校者。功力甚好，工作仔细认真，一丝不苟。

笔者翻译第三部分，其中第12章由赵慧琪翻译。笔者对全书的人名、地名、机构名以及数学的专用词汇最后进行统一校订。

在本书的翻译过程中，得到本书责任编辑黄明雨先生的大力支持，在此表示衷心感谢。

胡作玄

1999年7月

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝我要作数学家
作者＝［美］哈尔莫斯（Ｈａｌｍｏｓ，Ｐ．Ｒ．）著　马元德等译
页数＝５５５
ＳＳ号＝１１１８０７２３
出版日期＝１９９９年１０月第１版